

Никитин Сергей Юрьевич.

"Механика" С.Ю. Никитин, С.С. Чесноков. (серая книга).

С помощью оптической ловушки можно
формовать клетку на части.

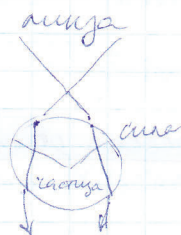
импульс и энергия света

$$p = \frac{E}{c}, \quad c - \text{скорость света.}$$

$$\frac{P}{t} = F - \text{сила светового давления}$$



оптическая ловушка



Классическая механика.

Архимед, Аристотель (3-4 вв. до н.э.) - первые законы.

Галилей, Гюйгенс, Ньютон (17 в.) - заложено
начало современной механики.

Лагранж, Даламбер, Лаплас

Максвелл, Больцман, Гиббс (19 в.) - статистическая
механика

Эйнштейн (20 в.) - теория относительности.

Планк, Гейзенберг, Шредингер (20 в.) - квантовая
механика

Основное абстракции механики.

Материальная точка - это тело, размером которого можно пренебречь.

Твердое тело - это система частиц, расстояние между любой парой которых всегда остается неизменным.

Сплошная среда - это среда, в которой величина распределена непрерывно. (воздух, вода)

§1. Кинематика материальной точки.

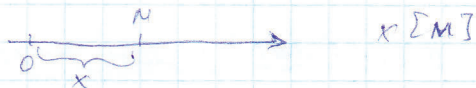
ф. движение без рассмотрение ее причин.

Механическое движение - перемещение одного тела относительно другого.

Задача механики - математически точно описать движение.

Движение точки по прямой.

Измерение расстояний - чтобы измерить расстояние, сравним его с длиной некоторого тела, принятого за эталон; тогда расстояние может быть выражено в виде числа.



Метр - расстояние, которое проходит свет в вакууме приблизительно за $\frac{1}{3 \cdot 10^8}$ секунд.

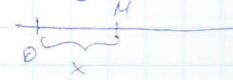
Измерение времени - сравним время с продолжительностью некоторого процесса, принятого за эталон.

Секунда - это период колебаний электрона в

Время t [с]

Закон движения

Ось координат
выбраны на
и единица

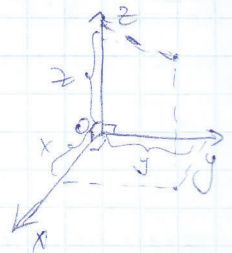


Движение точки

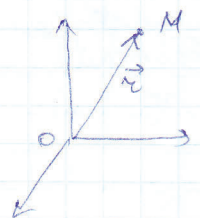


Закон движения

Движение точки



Радиус-вектор
начала отсчета

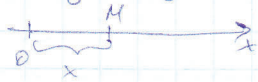


Секунда — это продолжительность $\approx 10^{10}$ колебаний электрона в атоме цезия.

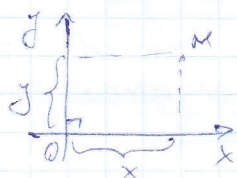
Время t [с]

Закон движения: $x = x(t)$

Ось координат — прямая линия, к которой выбраны начало отсчёта, положительное направление и единица измерения длины.



Движение точки на пл-ти.

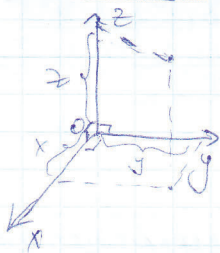


Декартова сис-ма координат. (оси $\perp$)

x, y — декартовы координаты точки.

Закон движения: $x(t), y(t)$.

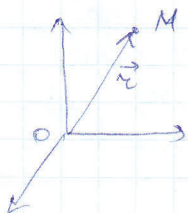
Движение точки в трёхмерном пр-во.



x, y, z — декартовы координаты.

Закон движения: $x(t), y(t), z(t)$.

Радиус-вектор точки. — это вектор, проведённый от начала отсчёта к данной материальной точке.



$\vec{r}$ — радиус-вектор точки M .

Закон движения: $\vec{r} = \vec{r}(t)$.

Координатная сис-ма не играет роли

Орто декартовых координат — единичные векторы, направленные вдоль декартовых осей координат.

$\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$
вдоль осей Ox, Oy, Oz

$$\vec{r} = \vec{i} \cdot x + \vec{j} \cdot y + \vec{k} \cdot z$$

Модуль радиус-вектора — расстояние от начала отсчёта до материальной точки.

$$|\vec{r}| \equiv r \quad - \text{обозначение.}$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \quad [\text{м}]$$

Перемещение — это разность радиус-векторов в точке, взятых в 2 разных момента времени.

$$\Delta \vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$$

— "в t_2 " радиус-вектор точки в момент времени t_1

$$\vec{r}_1 = \vec{r}(t_1), \quad \vec{r}_2 = \vec{r}(t_2)$$

Длительность перемещения: $\Delta t = t_2 - t_1$.



$\Delta \vec{r}$ — перемещение.

Скорость мат. точки — отношение перемещения к его длительности, когда длительность $\rightarrow 0$; это производная радиус-вектора точки по времени.

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\vec{r}}$$

обозначение ($\dot{}$ — производная по времени).

Декартовые компоненты скорости (v_x, v_y, v_z)

$$\vec{v} = \vec{i} \cdot v_x + \vec{j} \cdot v_y + \vec{k} \cdot v_z$$

Как обвязано декартовыми

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{i} \cdot x + \vec{j} \cdot y + \vec{k} \cdot z)$$

$$= \vec{i} \cdot \dot{x} + \vec{j} \cdot \dot{y} + \vec{k} \cdot \dot{z}$$

$$\Rightarrow v_x = \dot{x}, \quad v_y = \dot{y}, \quad v_z = \dot{z}$$

Модуль скорости

Ускорение —

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \dot{\vec{v}}$$

Декартовы компоненты

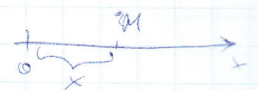
$$\vec{a} = \vec{i} \cdot a_x + \vec{j} \cdot a_y + \vec{k} \cdot a_z$$

$\Rightarrow$ аналогично

Модуль ускорения

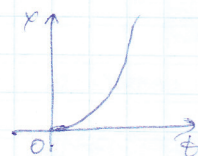
Пример: 1) равно

движение, и



$$a = \text{const}, \quad a = \dots$$

$$v = \frac{dx}{dt} = at$$



Как связаны декартовы компоненты скорости с декартовыми координатами точки?

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{i} \cdot x + \vec{j} \cdot y + \vec{k} \cdot z) = \vec{i} \cdot \frac{dx}{dt} + \vec{j} \cdot \frac{dy}{dt} + \vec{k} \cdot \frac{dz}{dt} = \vec{i} \cdot \dot{x} + \vec{j} \cdot \dot{y} + \vec{k} \cdot \dot{z}$$

$$\Rightarrow v_x = \dot{x}, v_y = \dot{y}, v_z = \dot{z}$$

Модуль скорости: $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} \quad [\frac{m}{c}]$

Ускорение — производная скорости в точке по времени.

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \ddot{\vec{r}} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \ddot{\vec{r}}$$

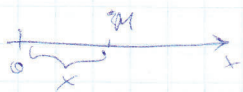
Декартовы компоненты ускорения (a_x, a_y, a_z)

$$\vec{a} = \vec{i} \cdot a_x + \vec{j} \cdot a_y + \vec{k} \cdot a_z$$

$$\Rightarrow \text{аналогично } a_x = \ddot{x} = \dot{v}_x, a_y = \ddot{y} = \dot{v}_y, a_z = \ddot{z} = \dot{v}_z$$

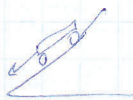
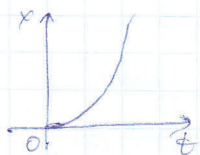
Модуль ускорения: $a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \quad [\frac{m}{c^2}]$

Пример: 1) равноускоренное движение по прямой. —
движение, при котором ускорение постоянно.



$$a = \text{const}, \quad a = \frac{dv}{dt} = \text{const} \Rightarrow v = at$$

$$v = \frac{dx}{dt} = at \Rightarrow x = \frac{at^2}{2}$$



2) Свободное падение.

Этой покажет, что $x = \frac{at^2}{2}$, $a = 9,8 \frac{m}{c^2} \equiv g$

Ускорение свободного падения

3) Криволинейное движение точки.

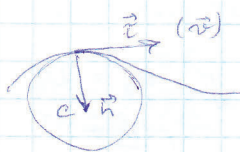
Тангенциальное и нормальное ускорение

Тангенциальное - составляющая ускорения, параллельная вектору скорости a_t

Нормальное ускорение - составляющая ускорения, $\perp$ вектору скорости a_n



Круг криволинейной кривой в точке - круг, проходящий через данную точку кривой M и две другие точки кривой N и P в пределе, когда $N \rightarrow M$ и $P \rightarrow M$.

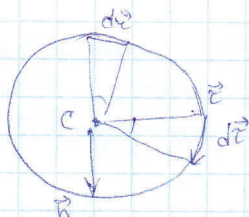


$$\vec{a} = \vec{e} \cdot a_t + \vec{r} \cdot a_n$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} \quad \vec{e} = \frac{\vec{v}}{v}, \quad |\vec{e}| = 1, \quad |\vec{r}| = 1$$

$$\vec{v} = \vec{e} v$$

$$\vec{a} = \vec{e} \cdot \frac{dv}{dt} + v \cdot \frac{d\vec{e}}{dt}$$



$$d\vec{e} = \vec{r} \cdot d\tau$$

$$\frac{d\tau}{r} = \frac{d\tau}{R} = d\tau$$

$$r = |\vec{r}| = 1$$

$$\vec{a} = \vec{e} \frac{dv}{dt} + v \cdot \vec{r} \cdot \frac{1}{R} \left(\frac{d\tau}{dt} \right) v$$

$$\vec{a} = \vec{e} \cdot \dot{v} + \vec{r} \cdot \frac{v^2}{R}$$

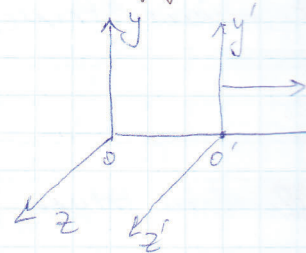
$$a_t = \dot{v}, \quad a_n = \frac{v^2}{R}$$

§2 Принцип относительности Галилея

Принцип относительности Галилея: законы физики одинаковы во всех инерциальных системах отсчета.

Математическое выражение закона преобразования координат и времени.

Преобразование Галилея



M - точка, движущаяся произвольно

$$\begin{cases} x = x' + V \cdot t \\ z = z', \quad y = y' \end{cases}$$

Состояние системы

$$\begin{cases} v_x = v_x' + V \\ v_y = v_y', \quad v_z = v_z' \end{cases}$$

$$\vec{v}_{abs} = \vec{v}_{rel} + \vec{V}$$

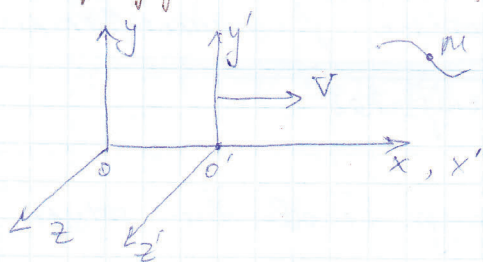
Уравнения движения

§2 Принцип относительности. Преобразования Галилея и преобразования Лоренца.

Принцип относительности Галилея: никакими механическими опытами, проведенными внутри данной системы отсчета, нельзя установить: находится ли эта система в состоянии покоя или равномерно прямолинейно движется.

Математическая формулировка: уравнения, описывающие физ. законы должны быть инвариантны относительно преобразования, описывающего переход от инерциальной с.о. к с.о., движущейся равномерно и прямолинейно.

Преобразования Галилея.



O' - начало инерциальной с.о., она движется со скоростью V .

M - точка, движущаяся в этих системах отсчета произвольным образом.

$$\begin{cases} x = x' + V \cdot t \\ z = z', y = y' \end{cases}$$

Сложение скоростей.

$$\begin{cases} v_x = v_x' + V \\ v_y = v_y', v_z = v_z' \end{cases}$$

$$\vec{v}_{\text{абс}} = \vec{v}_{\text{отн}} + \vec{v}_{\text{с.о.}}$$

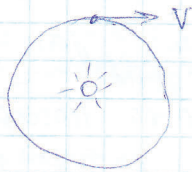
абсолютная относительная

Уравнения электромагнитного поля оказались неинвариантны относительно преобразования Галилея (формулы Лоренца).

Боло рещено проверить правило сложения скоростей для световых волн.

Скорость света $c = 3 \cdot 10^8 \frac{м}{с}$.

Максвелл предложил использовать в качестве подвижной системы отсчета земной шар в его движении вокруг Солнца.



$$V = 3 \cdot 10^4 \frac{м}{с}$$

Максвелл предложил сравнить продольную и поперечную скорости света, т.е. скорости света относительно Земли в направлении вдоль движения Земли и поперек движения Земли.

$v_{||}$ - продольная, $v_{\perp}$ - поперечная.

$$\begin{cases} v_x^2 + v_y^2 = c^2 \\ v_x = v_x' + V \\ v_y = v_y' \end{cases}$$

- гипотеза неподвижного эфира

скорость света относительно Земли

Продольная: $v_y' = 0 \Rightarrow v_x' = -V \pm c$

$$v_{||} \equiv |v_x'| = c \pm V$$

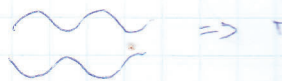
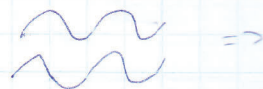
Поперечная: $v_x' = 0 \Rightarrow v_y = \pm \sqrt{c^2 - V^2}$

$$v_{\perp} \equiv |v_y'| = \sqrt{c^2 - V^2}$$

Видно, что эти скорости оказались разными.

Для измерения этих скоростей Максвелл предложил использовать явление интерференции света.

Интерференция световых волн
свет + свет

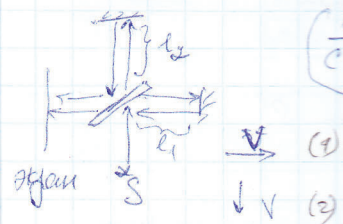


Период световых

$$\lambda = 0,5 \cdot 10^{-6} м$$

$$T \approx 10^{-15} с$$

Интерферометр



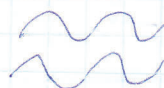
$$l_1 \approx l_2 \approx \frac{\lambda}{4} \left(\frac{c}{V} \right)^2$$

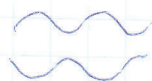
Опыт показал, что не меняется картина.

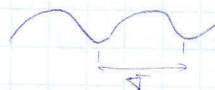
Максвелл неподвижного

Принцип постоянства скорости света к какой системе отсчета

Интерференция — взаимная компенсация действия световых волн в некоторых точках пр-ва;
 свет + свет = темнота

 $\Rightarrow$ свет

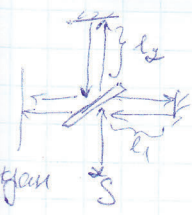
 $\Rightarrow$ темнота

Период световых колебаний —  $T = \frac{\lambda}{c}$

$\lambda = 0,5 \cdot 10^{-6} \text{ м}$ — длина световой волны.

$T \approx 10^{-15} \text{ с}$

Интерферометр Майкельсона $\leftarrow$ свет в положении 1



$$\left\{ \begin{aligned} \frac{l_1}{c-v} + \frac{l_1}{c+v} &= 2 \frac{l_2}{\sqrt{c^2-v^2}} \\ \frac{l_2}{c-v} + \frac{l_2}{c+v} &= 2 \frac{l_1}{\sqrt{c^2-v^2}} + \frac{T}{2} \end{aligned} \right.$$

$\nearrow$ темнота в положении 2.

$$l_1 \approx l_2 \approx \frac{\lambda}{4} \left(\frac{c}{v} \right)^2 \approx 10 \text{ м} (!)$$

Опыт показал, что никакие повороты прибора не мешают наблюдать интерференционную картину.

Майкельсон сделал вывод, что гипотеза неподвижного эфира ошибочна.

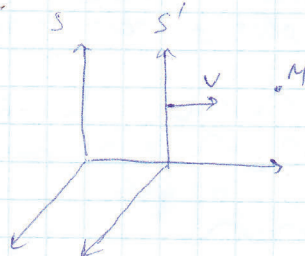
Принцип постоянства скорости света:

Скорость света не зависит от того, по отношению к какой с.о. находится или движется источник света.

На основе этого принципа была построена новая теория — теория относительности.

$$v_{\text{свет}} = v_{\text{свет}} = c.$$

$$\begin{cases} x = ct & \text{— в невозвратной с.о.} \\ x' = ct' & t \neq t' (!) \end{cases}$$



Основная посылка

(Движение влияет на время.
Время течёт по-разному в разных с.о.)

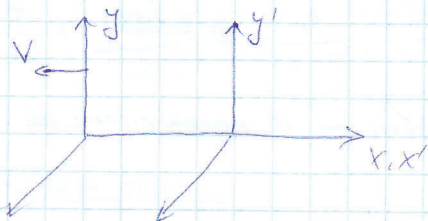
Преобразования

$$x, y, z, t \rightleftharpoons x', y', z', t'$$

$$\begin{cases} x = x' + vt' \\ t = t' + \frac{vx'}{c^2} \end{cases} \quad \begin{cases} y = y' \\ z = z' \end{cases}$$

$$\text{Если } x = ct \rightarrow x' = ct'$$

Получим теперь, что невозвратная с.о. — S'



$$\begin{cases} x' = x - vt \\ t' = t - \frac{vx}{c^2} \end{cases} \quad \left| \begin{array}{l} \text{если } x = ct, \text{ то } x' = ct' \end{array} \right.$$

В формулы вводит постоянный коэффициент.

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Получаем преобразование Лоренца.

$$\begin{cases} x = \frac{x' + vt'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \\ y = y', \quad z = z' \end{cases}$$

Здесь x, y, z ;

t, t' — время

Принцип относительности, возм. инвариантно.

Уравнение этой точки при

§3. Кинематика

Получательные ориентации. При нём с

$$\vec{v}_i = \vec{v}$$

Вращение в том при котором в а центр в а прямой, на кинематическая точка тела.

Закон движения поворота как

$$\begin{cases} x = \frac{x' + vt'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, & t = \frac{t' + \frac{x'v}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \\ y = y', & z = z' \end{cases}$$

Здесь x, y, z ; x', y', z' — координаты материальной точки в неподвижной и подвижной системах

t, t' — время в неподвижной с.о. и в подвижной с.о.

Принцип относительности Эйнштейна

Уравнения, выражающие физ. законы должны быть инвариантны относительно преобразований Лоренца.

Уравнение электромагнитного поля удовлетворяет этой принципу.

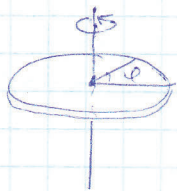
§3. Кинематика твердого тела.

Поступательное движение. — движение, при котором ориентация тела в пр-ве не меняется.
При нем скорость всех точек тела одинакова.

$$\vec{v}_i = \vec{v}$$

Вращение ^{тела} вокруг неподвижной оси. — движение, при котором все точки тела движутся по окружностям, а центры всех окружностей лежат на одной прямой, называемой осью вращения — премис ~~линии~~ ^{линии}, на кот. лежат неподвижные точки тела.

Закон движения тела определяется углом поворота как функцией времени.

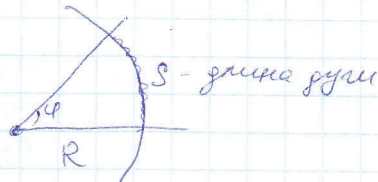


φ - угол поворота

$\varphi(t)$ - закон движения

Угол в радианах

$$\varphi = \frac{S}{R}$$



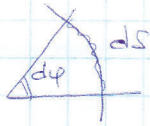
Это отношение длины дуги окружности, направленной в предположении к радиусу этой окружности.

$$\Rightarrow S = R\varphi$$

Угловая скорость вращения тела - производная угла поворота тела по времени.

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} = \dot{\varphi} \quad \left[\frac{\text{рад}}{\text{с}} \right]$$

Связь линейной и угловой скоростей. $v = R\omega$



$$v = \frac{ds}{dt} = R \frac{d\varphi}{dt} = R\omega$$

$$ds = R \cdot d\varphi$$

Вектор угловой скорости - вектор, направленный вдоль оси вращения тела по правилу правого винта, модуль которого равен производной угла поворота тела по времени.



$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} \quad \left[\frac{\text{рад}}{\text{с}} \right]$$

Теорема Вектор скорости в $\forall$ точке тела равен векторному произведению вектора угловой скорости на радиус-вектор точки: $\vec{v} = [\vec{\omega}, \vec{r}]$



Векторное произведение составляется вилка

$$\vec{c} = [\vec{a}, \vec{b}]$$

Пример: $[\vec{e}_1, \vec{e}_2]$

Векторное произведение

$$[\vec{a}, \vec{b}] = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$

Докажем теорему



Движение тела. Также движение одной неровности движется так, мгновенная скорость

$$\vec{v} = [\vec{\omega}, \vec{r}]$$

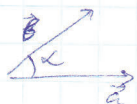
$$\vec{\omega} = \vec{\omega}(t) - \text{мгновенная}$$

Мгновенная скорость

Матрица поворота. Умножение скаляр равно скаляр. Система координат связанная с

Векторное произведение векторов — это вектор, $\perp$ осям
составителям и направленный по правилу правого
вишга.

$$\vec{c} = [\vec{a}, \vec{b}]$$



$$\vec{c} \odot - \text{от нас на нас.}$$

$$c = a \cdot b \cdot \sin \alpha$$

Пример: $[\vec{i}, \vec{j}] = \vec{k}$.

Векторное произведение в декартовых координатах

$$[\vec{a}, \vec{b}] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = \vec{i}(a_y b_z - a_z b_y) + \vec{j}(a_z b_x - a_x b_z) + \vec{k}(a_x b_y - a_y b_x)$$

Докажем теорему



$$\vec{v} \oplus$$

$$v = \omega \cdot r \cdot \sin \alpha$$

$$v = \omega r_{\perp}$$

Движение тела с одной непрерывной точкой.

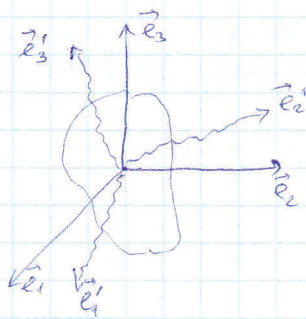
Такая движение описывается теоремой Эйлера: тело с
одной непрерывной точкой в t момент времени
движется так, как если бы оно вращалось вокруг
мировой оси, проходящей через точку закрепления.

$$\vec{v} = [\vec{\omega}, \vec{r}]$$

$\vec{\omega} = \vec{\omega}(t)$ — мировая угловая скорость вращения.

Мировая ось вращения — прямая линия, на которой
лежат непрерывные в данный момент точки тела.

Матрица поворота тела — n -ца, которая описывает
изменение ориентации тела в пространстве со временем
равно скалярному произведению ортов лабораторной
системы координат на орты системы координат, жестко
связанной с телом.



$$S_{ij} = \vec{e}_i \cdot \vec{e}_j'$$

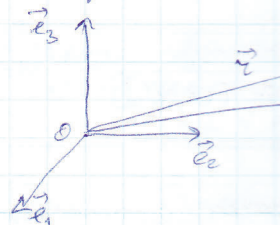
$$i, j = 1, 2, 3, \dots$$

$$x_1 = \vec{e}_1 \cdot \vec{e}_1' \cdot x_1' + \vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2' \cdot x_2' + \vec{e}_1 \cdot \vec{e}_3' \cdot x_3'$$

$$x_i = \sum_{j=1}^3 S_{ij} \cdot x_j'$$

§4. Кинематика

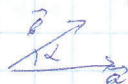
Найдём связь
движения по
базисам



Связь координат
Связь перемещений

Скалярное произведение векторов - произведение модулей
векторов на косинус угла между ними.

$$(\vec{a}, \vec{b}) = \vec{a} \cdot \vec{b} = ab \cdot \cos \alpha$$

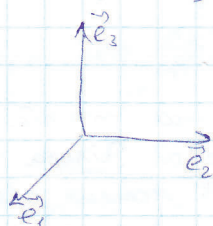


Скалярное произведение в декартовых координатах:

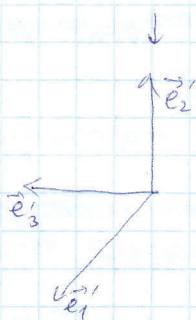
$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$$

$$S = \begin{pmatrix} \vec{e}_1 \cdot \vec{e}_1' & \vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2' & \vec{e}_1 \cdot \vec{e}_3' \\ \vec{e}_2 \cdot \vec{e}_1' & \vec{e}_2 \cdot \vec{e}_2' & \vec{e}_2 \cdot \vec{e}_3' \\ \vec{e}_3 \cdot \vec{e}_1' & \vec{e}_3 \cdot \vec{e}_2' & \vec{e}_3 \cdot \vec{e}_3' \end{pmatrix}$$

Пример:

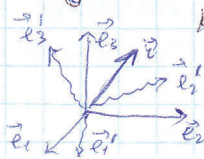


Голо
Поворачивается вокруг оси $\vec{e}_1$
на 90°



$$S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Изменение компонент вектора при повороте системы
координат



$$\vec{r} = \vec{e}_1 \cdot x_1 + \vec{e}_2 \cdot x_2 + \vec{e}_3 \cdot x_3 = \vec{e}_1' \cdot x_1' + \vec{e}_2' \cdot x_2' + \vec{e}_3' \cdot x_3'$$

$$+ x_1' \cdot d\vec{e}_1' + x_2' \cdot d\vec{e}_2' + x_3' \cdot d\vec{e}_3'$$

$$\text{т.к. } \vec{r} = [\vec{\omega}, \vec{r}]$$

$$\rightarrow d\vec{r} = [\vec{\omega}, \vec{r}]$$

По той формуле
вектора, несомненно
применение

$$\begin{cases} d\vec{e}_1' = [\vec{\omega}, \vec{e}_1'] \\ d\vec{e}_2' = [\vec{\omega}, \vec{e}_2'] \\ d\vec{e}_3' = [\vec{\omega}, \vec{e}_3'] \end{cases}$$

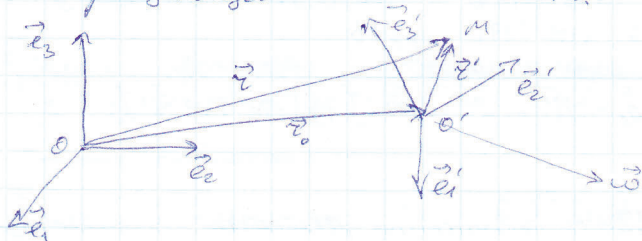
$$d\vec{r} = d\vec{r}' + [\vec{\omega}, \vec{r}']$$

$$x_i = \vec{e}_1 \vec{e}_1' \cdot x_1' + \vec{e}_1 \vec{e}_2' \cdot x_2' + \vec{e}_1 \vec{e}_3' \cdot x_3' = S_{11} x_1' + S_{12} x_2' + S_{13} x_3'$$

$$x_i = \sum_{j=1}^3 S_{ij} \cdot x_j'$$

§4. Кинематика вращающихся систем отсчета

Найдем связь кинематических характеристик движения точки относительно неподвижной и вращающейся сис-м отсчета.



Связь координат: $\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{r}'$

Связь перемещений:

$$d\vec{r} = d\vec{r}_0 + d\vec{r}'$$

$$\vec{r}' = \vec{e}_1' \cdot x_1' + \vec{e}_2' \cdot x_2' + \vec{e}_3' \cdot x_3'$$

$$d\vec{r}' = \underbrace{\vec{e}_1' \cdot dx_1' + \vec{e}_2' \cdot dx_2' + \vec{e}_3' \cdot dx_3'}_{d'\vec{r}'} +$$

$$+ x_1' \cdot d\vec{e}_1' + x_2' \cdot d\vec{e}_2' + x_3' \cdot d\vec{e}_3'$$

$$\text{т.к. } \vec{\omega} = [\vec{\omega}, \vec{r}] = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

$$\rightarrow d\vec{r} = [\vec{\omega}, \vec{r}] dt$$

По этой формуле можно найти приращение модуля вектора, жестко связанного с вращающейся сис-мой, приращение угла.

$$\begin{cases} d\vec{e}_1' = [\vec{\omega}, \vec{e}_1'] dt \\ d\vec{e}_2' = [\vec{\omega}, \vec{e}_2'] dt \\ d\vec{e}_3' = [\vec{\omega}, \vec{e}_3'] dt \end{cases}$$

$$d\vec{r}' = d'\vec{r}' + [\vec{\omega}, \vec{r}'] dt$$

Связь скоростей:

$$d\vec{v} = d\vec{v}_0 + d\vec{v}' = d\vec{v}_0 + d'\vec{v}' + [\vec{\omega}, \vec{v}'] dt \quad | : dt$$

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{v}' + [\vec{\omega}, \vec{v}']$$

где $\frac{d\vec{v}_0}{dt}$ — $\vec{a}_0$ — $\vec{a}'$ — $\vec{a}_K$

Связь ускорений:

$$d\vec{v} = d\vec{v}_0 + d\vec{v}' + [\vec{\omega}, d'\vec{v}'] \quad (\vec{\omega} = \text{const})$$

$$d'\vec{v}' = d'\vec{v}' + [\vec{\omega}, \vec{v}'] dt$$

Аналогично:

$$d\vec{v}' = d'\vec{v}' + [\vec{\omega}, \vec{v}'] dt$$

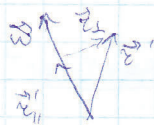
$$d\vec{v} = d\vec{v}_0 + d'\vec{v}' + [\vec{\omega}, \vec{v}'] dt + [\vec{\omega}, d'\vec{v}'] + [\vec{\omega}, [\vec{\omega}, \vec{v}']] \quad | : dt$$

$$\vec{a} = \vec{a}_0 + \vec{a}' + 2[\vec{\omega}, \vec{v}'] + [\vec{\omega}, [\vec{\omega}, \vec{v}']]$$

$$\vec{a} = \vec{a}' + \vec{a}_0 + \vec{a}_K$$

$$\vec{a}_0 = \vec{a}_0 + [\vec{\omega}, [\vec{\omega}, \vec{v}']] \text{ — переносное ускорение}$$

$$\vec{a}_K = 2[\vec{\omega}, \vec{v}'] \text{ — кориолисово ускорение}$$



$$\vec{v}' = \vec{v}'_{||} + \vec{v}'_{\perp}$$

$$[\vec{\omega}, \vec{v}] = [\vec{\omega}, \vec{v}_{\perp}]$$

$$[\vec{a}, [\vec{b}, \vec{c}]] \sim \vec{b}(\vec{a}, \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a}, \vec{b})$$

$$\Rightarrow [\vec{\omega}, [\vec{\omega}, \vec{v}']] = [\vec{\omega}, [\vec{\omega}, \vec{v}'_{\perp}]] = \omega(\underbrace{[\vec{\omega}, \vec{v}'_{\perp}]}_0) - \vec{v}'_{\perp} \omega^2 = -\vec{v}'_{\perp} \omega^2$$

центростремительное ускорение:

$$\vec{a}_{ц.с.} = -\omega^2 \vec{v}'_{\perp}$$

$$\vec{a} = \vec{a}' + \vec{a}_0 + \vec{a}_K$$

$$\begin{cases} \vec{a}_0 = -\omega^2 \vec{v}'_{\perp} \\ \vec{a}_K = 2[\vec{\omega}, \vec{v}'] \end{cases}$$

§5. Законы

Всё же тело сферическое

1 закон. Если тело, не испытывающее

2 закон. Сила равнодействующая $m\vec{a} = \vec{F}$

3 закон. Действие равно противодействию $\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$

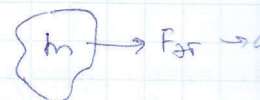
Масса — это мера инертности

Сила — это мера взаимодействия

Измерение сил. Введём единицу силы, которая производит такое же ускорение на такое же тело.

Единица силы выводится из уравнения $F_{\text{эт}} = 1 \text{ Н} = m \cdot a$

Измерение массы



Пример $a_1 = 2 \frac{m}{s^2}$

§5. Законы Ньютона.

Всякое тело сохраняет состояние покоя или ~~равномерного~~ ~~прямолинейного~~ равномерного движения.

1 закон. Если система отсчета, относительно которой движется тело, бесконечно удаленная от других тел, не испытывает ускорения. Такие системы называют инерциальными.

2 закон. Произведение массы матер. точки на ускорение равно действующей на неё силе.

$$m\vec{a} = \vec{F}$$

3 закон. Действие 2-х тел друг на друга равно и противоположно направлено.

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$$

Масса - это мера отклика тела на действие силы; мера инерции тела.

Сила - это мера действия на данное тело других тел.

Измерение сил и масс.

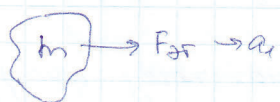
Введём единицу измерения масс 1 кг - это масса золотного тела, представляющего собой цилиндр из сплава платины и иридия диаметром 39 мм и такой же высоты.

$$m_{\text{эт}} = 1\text{ кг}$$

Единица измерения силы - Ньютон - это сила, кот. вызывает ускорение в $1\frac{\text{м}}{\text{с}^2}$ у тела, массой 1 кг .

$$F_{\text{эт}} = 1\text{ Н} = 1\text{ кг} \cdot 1\frac{\text{м}}{\text{с}^2}$$

Измерение масс.



$$m = \frac{F_{\text{эт}}}{a_1}$$

Пример $a_1 = 2\frac{\text{м}}{\text{с}^2}$.

$$F_{\text{эт}} = 1\text{ Н} = 1\text{ кг} \cdot \frac{\text{м}}{\text{с}^2} \Rightarrow m = 0,5\text{ кг}$$

Измерение силы

Чтобы измерить силу, воздействует этой силой на тело известной массы и измерим ускорение.

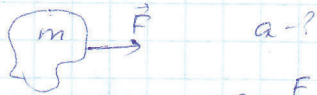
$$[m_{\text{эт}}] \xrightarrow{F} a_z$$

После этого силу найдём по формуле: $F = m_{\text{эт}} \cdot a_z$

Пример $a_z = 3 \frac{M}{c^2}$; $m_{\text{эт}} = 1 \text{ кг}$ $\Rightarrow F = 3 \frac{M}{c^2} \cdot 1 \text{ кг} = 3 \text{ Н}$

Опытная проверка 2-го закона Ньютона.

Берём произвольное тело и произвольную пружину.

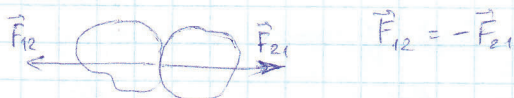


$$a = \frac{F}{m} = \frac{3 \text{ Н}}{0,5 \text{ кг}} = 6 \frac{M}{c^2}$$

2-ой закон Ньютона действует для огромного количества тел, а перестаёт действовать только в 2-х случаях

- 1) когда тело движется очень быстро; со скоростью, близкой к скорости света.
- 2) движение очень маленьких тел в малых областях пр.в. (например, электроны в атоме)

3 закон Ньютона

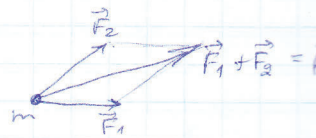


Особенности сил взаимодействия

- 1) эти силы приложены к разным телам
- 2) эти силы направлены вдоль одной прямой
- 3) они имеют одинаковую природу.

Сложение сил

Опыт показывает, что если на мая. точку одновременно действуют 2 силы, то она начинает двигаться так, как если бы действовала одна сила, равная векторной сумме первых двух сил.



Материальное тело

2-ой закон Ньютона

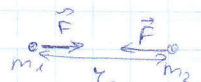
$$\vec{p} = \vec{F}$$

скорость изменения

§6. Сила

Зависимость

- 1) Закон всемирного тяготения



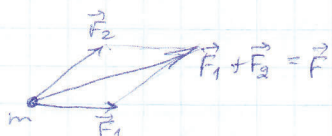
G - гравитационная постоянная

$$F = G \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2}$$

Опыт показывает

- 2) Принцип суперпозиции





$$\vec{F} = \sum_i \vec{F}_i$$

Импульс материальной точки — это произведение массы точки на её скорость. $\vec{p} = m\vec{v}$ [кг·м/с]

2-ой закон Ньютона теперь можно записать так:

$$\dot{\vec{p}} = \vec{F}$$

скорость изменения импульса

§6. Силы в механике.

Гравитационные силы.

- 1) Закон всемирного тяготения. Любые две мат. точки (закон Ньютона) притягиваются друг к другу с силой, пропорциональной их массам и обратно пропорциональной квадрату расстояния между ними.

$$F \sim \frac{m_1 m_2}{r^2}$$

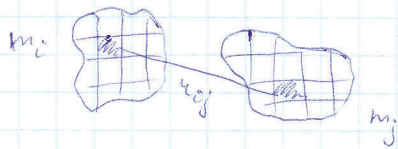
G — гравитационная постоянная.

$$F = G \cdot \frac{m_1 m_2}{r^2}$$

Эксп. показывает, что $G = 6,6 \cdot 10^{-11} \frac{\text{Н} \cdot \text{м}^2}{\text{кг}^2}$

- 2) Принцип суперпозиции. Каждое тело действует независимо, т.е. так, как если бы других тел не было.

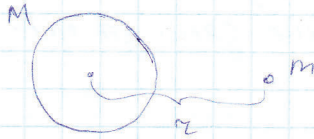
$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots$$



$$F_{ij} = G \frac{m_i m_j}{r_{ij}^2}$$

$$\vec{F} = \sum_i \sum_j \vec{F}_{ij}$$

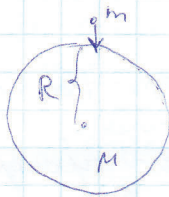
Пример Притяжение точки к однородному шару.



$$F = G \frac{Mm}{r^2}$$

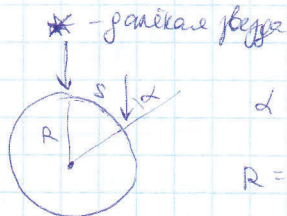
Расчет показывает, что точка притягается к шару так, как если бы вся масса шара находилась бы в его центре.

Пример Вывешивание Земли.



$$F = G \frac{Mm}{R^2} = mg$$

$$M = \frac{gR^2}{G}$$



$$L = \frac{s}{R}$$

$$R = \frac{s}{\alpha}$$

$R = 6400 \text{ km}$ - радиус Земли.
 $M = 6 \cdot 10^{24} \text{ кг}$.

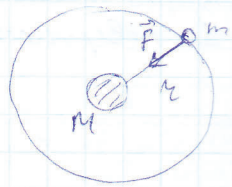
Факт, подтверждающий закон всемирного тяготения.

1) ускорение свободного падения одинаково для всех тел вблизи поверхности Земли.

$$F = G \frac{Mm}{R^2} = mg$$

$$g = G \frac{M}{R^2} - \text{инвариант}$$

2) период обращения



$$v^2 = G \frac{M}{r}$$

$$v = \sqrt{G \frac{M}{r}}$$

$$T = 2\pi \cdot r \cdot \frac{\sqrt{r}}{R\sqrt{g}}$$

$$r = 384000 \text{ км}$$

$$g = 10 \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$$

$$R = 6400 \text{ км}$$

Сила упругости
упругих тел

Упругое тело
возвращается к

Сила упругости
деформации

$$F = 0$$

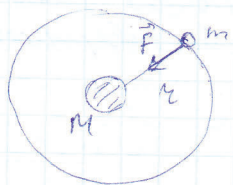
$$F$$

k - коэффициент

Сила трения - сила
перемещения

Трение покоя -
определяется

2) период обращения Луны вокруг Земли.



$$m \cdot \frac{v^2}{R} = m \cdot \frac{v^2}{r} = G \frac{Mm}{r^2}$$

$$T = \frac{2\pi r}{v}$$

$$g = G \frac{M}{R^2}$$

$$v^2 = G \frac{M}{r}$$

$$v = \sqrt{G \frac{M}{r}} \rightarrow T = 2\pi r \cdot \sqrt{\frac{r}{GM}}$$

$$T = 2\pi \cdot r \cdot \frac{\sqrt{r}}{R\sqrt{g}}$$

$$r = 384000 \text{ km}$$

$$g = 10 \frac{\text{m}}{\text{с}^2}$$

$$R = 6400 \text{ km}$$

$$T = 30 \text{ суток}$$

Сила упругости - сила, препятствующая деформации упругих тел.

Упругое тело - тело, кот. восстанавливает свою форму после прекращения действия сил.

Сила упругости пропорциональна величине деформации.

$$F = 0$$

$$F \sim x \quad [F_x = -kx] \text{ - закон Гука.}$$

$$k - \text{коэффициент упругости } [\text{Н/м}]$$

Сила трения - сила, препятствующая относительному перемещению соприкасающихся тел.

$$\text{Трение покоя} - \vec{F} \rightarrow F \quad \vec{F} + \vec{F}_{\text{тр}} = 0 \rightarrow \vec{F}_{\text{тр}} = -\vec{F}$$

Опыт показывает, что $F_{\text{тр}} \leq F_{\text{max}}$

Максимальная сила трения покоя.

Сила нормального давления - это составляющая силы взаимодействия соприкасающихся тел, $\perp$ поверхности соприкосновения. N .

Опыт показывает $F_{\max} \sim N$,

$F_{\max} = \mu N$, μ - коэффициент трения.



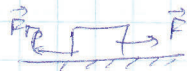
$$N = mg \cdot \cos \alpha$$

$$F_{\text{тр}} = mg \cdot \sin \alpha$$

$$\frac{F_{\text{тр}}}{N} = \tan \alpha$$

$$\boxed{\mu = \tan \alpha_{\max}}$$

Трение скольжения.



$$F_{\text{тр}} = \mu N$$

Вязкое трение - трение, препятствующее движению тела в сплошной среде.

Особенности

- 1) отсутствие трения покоя
- 2) сила трения зависит от скорости $F_{\text{тр}} \sim v$ (если v - мала)

Электромагнитная сила.

Сила Кулона F .

Диэлектрический коэффициент ϵ - мера электрического взаимодействия тел.

Напряженность электрического поля. $\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q}$

$\vec{F} = q \cdot \vec{E}$ - электромагнитная сила

Сила Лоренца.



$$\vec{F} = q \cdot [\vec{v}, \vec{B}]$$

B электромагнитное поле

$$\vec{F} = q \cdot \vec{E} + q \cdot [\vec{v}, \vec{B}]$$

Движение заряда в электромагнитном поле с учетом уравнения движения

$$\vec{\dot{p}} = \vec{F}$$

$$\vec{F} = q \cdot \vec{E} + q \cdot [\vec{v}, \vec{B}]$$

$$\boxed{\vec{p} = \frac{m \vec{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}}$$

m - масса частицы

v - ее скорость

c - скорость света

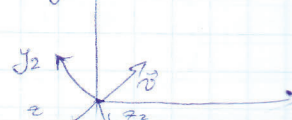
Релятивистская

$$\vec{\dot{p}} = \vec{F}, \quad \vec{p} =$$

$$\vec{F} = q \cdot \vec{E} + q \cdot [\vec{v}, \vec{B}]$$

сила Лоренца

Вывод РЛД (J)



Сила Лоренца.



N S

$\vec{B}$ - вектор магнитной индукции.

$$\vec{F} = q \cdot [\vec{v}, \vec{B}]$$

$\vec{B}$ электромагнитное поле;

$$\vec{F} = q\vec{E} + q \cdot [\vec{v}, \vec{B}]$$

Движение заряженной частицы в электромагнитном поле с длиной λ описывается релятивистскими уравнениями движения:

$$\dot{\vec{p}} = \vec{F}$$

$$\vec{F} = q\vec{E} + q \cdot [\vec{v}, \vec{B}]$$

$$\vec{p} = \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad \text{— уравнение 2-го закона Ньютона}$$

m - масса частицы

v - её скорость

c - скорость света

Релятивистские уравнения движения.

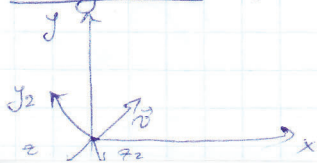
$$\dot{\vec{p}} = \vec{F}, \quad \vec{p} = \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad \text{— релятивистский импульс.}$$

$$\vec{F} = q\vec{E} + q \cdot [\vec{v}, \vec{B}]$$

сила Лоренца

- телу нужно прижать такую силу, что оно будет двигаться со скоростью света.

Винберг Р.В.Д. (Планк 1906г.)



система отсчёта

$$S_1: m\vec{\omega}_1 = \vec{F}_1$$

$$\vec{F} = \vec{F}_n = e\vec{E}_1 + e \cdot [\vec{v}_1, \vec{B}_1]$$

$$S_1 \rightarrow S_2: \vec{\omega}_1 \rightarrow \vec{\omega}_2$$

необходимо!

$$\vec{F}_1, \vec{B}_1 \rightarrow \vec{F}_2, \vec{B}_2$$

$$S_2 \rightarrow S_1: \vec{p} = \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

$$\vec{F} = e\vec{E} + e[\vec{v}, \vec{B}]$$

Уточнение понятия массы.

Опыт по измерению массы нутри проводить при скоростях много меньше скорости света.

§7. Неправильное с.о. Сила инерции.

Неправильное с.о. — любая система, кот. движется с постоянным ускорением относительно поверхности Земли.

Какие особенности приобретает физическое явление в неправильных с.о.?

$\vec{a}$ — ускорение материальной точки относительно инерциальной с.о.

$\vec{a}'$ — „ — „ — „ неправильной с.о.

$$m\vec{a} = \vec{F}$$

$$m\vec{a}' = ?$$

$$m\vec{a} + m\vec{a}' - m\vec{a}' = \vec{F}$$

$$m\vec{a}' = \vec{F} - m(\vec{a} - \vec{a}')$$

Сила инерции — добавочная сила, действующая на материальную точку в неправильной с.о. и определяемая формулой:

$$\vec{F}_{\text{ин}} = -m(\vec{a} - \vec{a}')$$

$$m\vec{a}' = \vec{F} + \vec{F}_{\text{ин}}$$

$$\S 4 \rightarrow \vec{a} =$$

$$\vec{F}_{\text{ин}} = \vec{F}_n + \vec{F}_k$$

переносная

$$\vec{F}_n = -m\vec{a}_{\parallel}$$

$$\vec{F}_k = -m\vec{a}_k - \dots$$

$$\S 4 \rightarrow \vec{a}_n = \vec{a}$$

$$\vec{a}_k = \dots$$

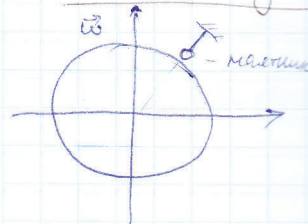
$$\vec{F}_n = -m\vec{a}_n + m\vec{a}$$

$$\vec{F}_k = -2m[\vec{\omega}, \vec{v}]$$

Центробежная

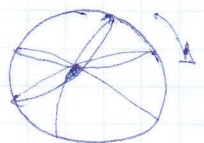
$$\vec{F}_{\text{ц.б.}} = m\omega^2 \vec{r}'_{\perp}$$

Магнитик Ручко



$$\vec{\omega}_{\perp}$$

$$\vec{F}_k = -2m[\vec{\omega}, \vec{v}]$$



$$\S 4 \rightarrow \vec{a} = \vec{a}' + \vec{a}_n + \vec{a}_k$$

$$\vec{F}_{\text{ин}} = \vec{F}_n + \vec{F}_k$$

переносная сила инерции.

$$\vec{F}_n = -m\vec{a}_n$$

$$\vec{F}_k = -m\vec{a}_k - \text{корисонова сила инерции.}$$

$$\S 4 \rightarrow \vec{a}_n = \vec{a}_0 - \omega^2 \cdot \vec{r}'_{\perp}$$

$$\vec{a}_k = 2[\vec{\omega}, \vec{v}']$$

$$\vec{F}_n = -m\vec{a}_0 + m\omega^2 \vec{r}'_{\perp}$$

- возникает состояние невесомости, перегрузку

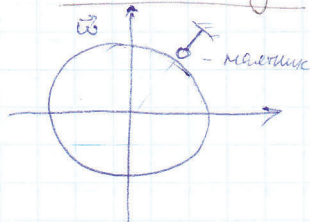
$$\vec{F}_k = -2m[\vec{\omega}, \vec{v}']$$

Центробетная сила инерции.

$$\vec{F}_{\text{цб}} = m\omega^2 \vec{r}'_{\perp}$$

- при вращении плече света отклоняется к оси вращения; (так и маятники от оси вращения).

Маятник Фуко.



$\omega_{\perp}$



Плоскости

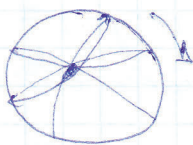
через какое-то время маятник содейт

плоскости, вост. нахорится ближе к кам, т.к.

$\omega_{\perp}$

$\vec{v}'$

$$\vec{F}_k = -2m[\vec{\omega}, \vec{v}'] = -2m[\vec{\omega}_{\perp}, \vec{v}']$$



§ 8. Импульс системы частиц. Движение центра масс.

Импульс н.ч. $\vec{p} = m\vec{v}$

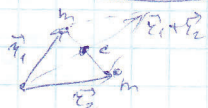
Импульсом системы частиц наз. сумма импульсов отдельных частиц сист-мы

$$\vec{P} = \sum_i \vec{p}_i = \sum_i m_i \vec{v}_i$$

Центр масс сист-мы частиц - это точка, радиус-вектор которой определяется формулой:

$$\vec{r}_c = \frac{1}{m} \cdot \sum_i m_i \vec{r}_i$$

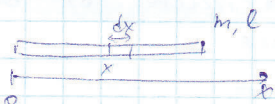
Пример



$$\vec{r}_c = \frac{m\vec{r}_1 + m\vec{r}_2}{2m}$$

$$\vec{r}_c = \frac{\vec{r}_1 + \vec{r}_2}{2}$$

Пример центр масс стержня.

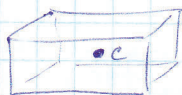


$c = ?$

$$x_c = \frac{1}{m} \cdot \sum_i m_i x_i$$

$$dm = \frac{m}{l} \cdot dx$$

$$x_c = \frac{1}{m} \int_0^l x \frac{m}{l} dx = \frac{l}{2}$$



Скорость и ускорение центра масс.

$$\vec{v}_c = \frac{1}{m} \cdot \sum_i m_i \vec{v}_i, \quad m = \sum_i m_i - \text{масса системы}$$

$$\vec{v}_c = \frac{1}{m} \sum_i m_i \vec{v}_i$$

$$\vec{a}_c = \frac{1}{m} \sum_i m_i \vec{a}_i$$

Отсюда видно, что
каждая сист-ма

$$\vec{P} = m \cdot \vec{v}_c$$

Закон движения

Всегда помните

силы взаимодействия

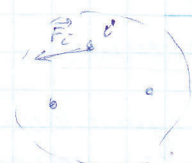


$\Rightarrow$ по

закону сохранения

$$\sum_i \sum_j \vec{F}_{ij} = 0$$

Внешние силы
действуют на



$\Rightarrow \sum_i$

$$\sum_i \vec{F}_i = \vec{F}_{\text{внеш}} - \text{сумма}$$

$$\Rightarrow m \cdot \vec{a}_c = \vec{F}_{\text{внеш}}$$

$$\vec{v}_c = \frac{1}{m} \sum_i m_i \vec{v}_i \quad - \text{ скорость центра масс.}$$

$$\vec{a}_c = \frac{1}{m} \sum_i m_i \vec{a}_i \quad - \text{ ускорение центра масс}$$

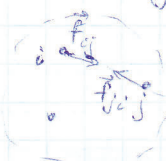
Отсюда видно, что импульс произвольной механической сис-мы может быть записан в виде:

$$\boxed{\vec{p} = m \cdot \vec{v}_c} \quad - \text{ импульс системы.}$$

Закон движения центра масс.

Введем понятие внутренних и внешних сил.

силы взаимодействия между телами данной сис-мы.



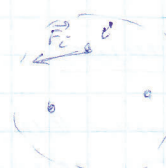
$$\vec{F}_{ij} = -\vec{F}_{ji} \quad (\text{по III закону Ньютона})$$

$$\Rightarrow \vec{F}_{ij} + \vec{F}_{ji} = 0 \quad \forall i \neq j.$$

$\Rightarrow$ полная сумма внутренних сил равна нулю для любой механической сис-мы.

$$\sum_i \sum_j \vec{F}_{ij} = 0$$

Внешние силы — силы, с к-ми на тела сис-мы действуют тела, не входящие в данную сис-му.



$$\vec{F}_i \quad - \text{ внешняя сила.}$$

$$m_i \vec{a}_i = \vec{F}_i + \sum_j \vec{F}_{ij}$$

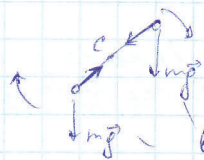
$$\Rightarrow \sum_i m_i \vec{a}_i = \sum_i \vec{F}_i + \underbrace{\sum_i \sum_j \vec{F}_{ij}}_{=0}$$

$$\sum_i \vec{F}_i = \vec{F}_{\text{внеш}} \quad - \text{ сумма внешних сил.} \quad (0 \text{ по св-ву внутренних сил})$$

$$\Rightarrow \boxed{m \cdot \vec{a}_c = \vec{F}_{\text{внеш}}}$$

Центр масс мех. сис-мы движется так, как если бы в этой точке находилась вся масса сис-мы, и к ней были бы приложены все внешние силы.

Пример



А центр

Шари движутся свободно, а центр масс по параболе.

§9 Закон сохранения импульса.

Закон изменения импульса сис-мы.

$$\vec{p} = \sum_i m_i \vec{v}_i$$

$$\dot{\vec{p}} = \sum_i m_i \vec{a}_i = m \vec{a}_c = \vec{F}_{\text{внеш}}$$

скорость изменения импульса сис-мы

$$\dot{\vec{p}} = \vec{F}_{\text{внеш}}$$

Эта формула показывает, что $\dot{\vec{p}}$ — скорость изменения импульса сис-мы равна сумме внешних сил.

Закон сохранения импульса

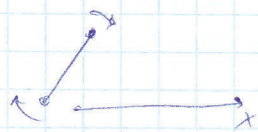
Если же сумма внешних сил равна нулю, то импульс механической сис-мы сохраняется!

$$\text{Если } \vec{F}_{\text{внеш}} = 0 \rightarrow \vec{p} = \sum_i m_i \vec{v}_i = \text{const}$$

Более сильная формулировка закона сохранения импульса:

если $\exists$ такая ось, в проекции на которую сумма внешних сил равна нулю, то в направлении этой оси импульс сис-мы сохраняется.

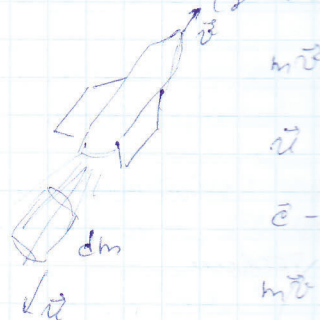
$$\text{Если } F_{\text{внеш}}^{(x)} = 0, \text{ то } \vec{p}_x = \sum_i m_i v_{ix} = \text{const}$$



$$m_1 v_{1x} + m_2 v_{2x} = \text{const.}$$

Пример

реактивный (движение)



Реактивная сила

Пример

ракета

$$c = 3 \text{ км/с}$$

$$\mu = 10$$

$$F_p = m \cdot c$$

Пример. реактивное движение
(движение ракеты, движение самолета за счет выброса струи)



$$m\vec{v} = (m - dm)(\vec{v} + d\vec{v}) + \vec{u} \cdot dm$$

$$\vec{u} = \vec{v} + \vec{c}$$

$\vec{c}$ — скорость струи относительно ракеты.

$$m\vec{v} = m\vec{v} + m d\vec{v} - \vec{v} \cdot dm - \underbrace{dm \cdot d\vec{v}}_{\rightarrow 0} + \vec{v} dm + \vec{c} dm$$

$$m d\vec{v} + \vec{c} dm = 0; \quad | : dt$$

$$m \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} + \vec{c} \frac{dm}{dt} = - \vec{c} \cdot \frac{dm}{dt}$$

$$m\vec{a} = \vec{F}_p = -\vec{c} \cdot \dot{m} = -\vec{c} \cdot \mu, \quad \text{где } \mu = \frac{dm}{dt} \text{ — скорость расхода массы}$$

Реактивная сила

$$\boxed{F_p = -\vec{c} \cdot \mu}$$

Пример. ракета Энгельс.

$$c = 3 \text{ км/с}$$

$$\mu = 10 \text{ тонн/с}$$

$$F_p = \mu c = 3 \cdot 10^3 \frac{\text{м}}{\text{с}} \cdot 10^4 \frac{\text{кг}}{\text{с}} = 3 \cdot 10^7 \text{ Н} = 3000 \text{ тонн (!)}$$

Закон сохранения импульса в теории относительности.

Если сумма внешних сил равна нулю, то релятивистский импульс системы сохраняется

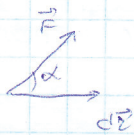
$$\vec{p} = \sum_i \frac{m_i \vec{v}_i}{\sqrt{1 - \frac{v_i^2}{c^2}}} = \text{const.}$$

§ 10. Работа и потенциальная энергия.

Элементарная работа — скалярное произведение силы на бесконечно малое перемещение точки приложения силы

$$dA = \vec{F} \cdot d\vec{r} \quad [H \cdot m = J]$$

Работа и путь



$$dA = F \cdot dr \cdot \cos \alpha$$

$$dA = F_x \cdot dx + F_y \cdot dy + F_z \cdot dz$$

Работа — сумма элементарных работ.

$$A = \int dA = \int \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

Потенциальная сила. Если работа силы, действующей на материальную точку, равна 0 при перемещении этой точки по любому замкнутому контуру, то сила называется потенциальной.

$$\oint dA = \oint \vec{F} \cdot d\vec{r} =$$

Это интеграл

Континуальной системы

Элементарная работа

$$d\Pi = -dA_{\text{п}}$$

Потенциальная энергия

$$\Pi = \int d\Pi = - \int_{r_0}^r \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

$$\Rightarrow \Pi = \Pi(r, \vec{v})$$

Выведение

$$d\Pi = -dA = -\vec{F} \cdot d\vec{r}$$

$$= \frac{\partial \Pi}{\partial x} dx + \frac{\partial \Pi}{\partial y} dy + \frac{\partial \Pi}{\partial z} dz$$

$$\Rightarrow F_x = -\frac{\partial \Pi}{\partial x}; \quad F_y = -\frac{\partial \Pi}{\partial y}; \quad F_z = -\frac{\partial \Pi}{\partial z}$$

$$\vec{F} = \vec{i} F_x + \vec{j} F_y + \vec{k} F_z$$

$$\boxed{\vec{F} = -\text{grad } \Pi}$$

Потенциальная энергия

$$\Pi = \sum \Pi_i$$

$$\oint \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0.$$

Это сила тяжести, упругости, Кулона.

Консервативной силой явл-ся сила Френша; работа силы Френша всегда < 0 .

Элементарная потенциальная энергия — элементарная работа потенциальной силы, взятая со знаком «-».

$$d\Pi = -dA_{\pi} \quad [\text{Дж}]$$

Потенциальная энергия — сумма элементарных потенциальных энергий.

$$\Pi = \int d\Pi = - \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \vec{F} \cdot d\vec{r}, \text{ где } \vec{F} - \text{потенциальная сила.}$$

$\Rightarrow \Pi = \Pi(\vec{r}, \vec{r}_0)$, т.е. величина Π не зависит от траектории.

Выражение силы через потенциальную энергию.

$$d\Pi = -dA = -\vec{F} \cdot d\vec{r} = -(F_x dx + F_y dy + F_z dz) =$$

$$= \frac{\partial \Pi}{\partial x} dx + \frac{\partial \Pi}{\partial y} dy + \frac{\partial \Pi}{\partial z} dz$$

$$\Rightarrow F_x = -\frac{\partial \Pi}{\partial x}, \quad F_y = -\frac{\partial \Pi}{\partial y}, \quad F_z = -\frac{\partial \Pi}{\partial z}.$$

$$\vec{F} = \vec{i} F_x + \vec{j} F_y + \vec{k} F_z = -\left(\vec{i} \frac{\partial \Pi}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial \Pi}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial \Pi}{\partial z}\right)$$

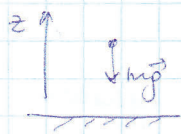
градиент ф-ции Π $\text{grad } \Pi$

$$\boxed{\vec{F} = -\text{grad } \Pi}$$

Потенциальная энергия системы частиц — сумма потенциальных энергий отдельных частиц системы.

$$\Pi = \sum_i \Pi_i.$$

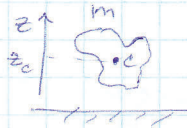
Примеры ① Сила тяжести.



$$d\Pi = -dA = -\vec{F} d\vec{z} = -mg \cdot d\vec{z} = mg dz$$

$$\Pi = \int d\Pi = \int_0^z mg dz = mgy$$

Потенциальная энергия тела произвольной формы.



$$\Pi = \sum_i \Pi_i = g \sum_i m_i z_i$$

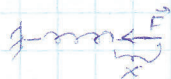
$$\vec{z}_c = \frac{1}{m} \sum_i m_i \vec{z}_i$$

$$z_c = \frac{1}{m} \sum_i m_i z_i$$

$$\Rightarrow \boxed{\Pi = mgy_c}$$

② Сила упругости.

for $F=0$

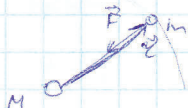


$$F_x = -kx$$

$$d\Pi = -dA = -\vec{F} d\vec{x} = -F_x dx = kx dx$$

$$\Pi = \int d\Pi = k \int_0^x x dx = \frac{kx^2}{2}$$

③ Центральное силовое поле — поле силы, направленной всегда в сторону одной и той же точки, называемой силовым центром.



$$\vec{F} = -\frac{\vec{r}}{r} \cdot F$$

$$F = G \frac{Mm}{r^2}$$

$$d\Pi = -dA = -\vec{F} d\vec{r} = \frac{r}{r} F dr$$

$$\vec{r} d\vec{r} = xdx + ydy + zdz$$

$$\boxed{\vec{r} d\vec{r} = r dr}$$

Знак + вектора $\vec{r}$ и $d\vec{r}$ одинаковы, поэтому $\vec{r} d\vec{r}$ равно $r dr$.

$$\Rightarrow d\Pi = F dr = G$$

$$\Pi = \int d\Pi = G M m / r$$

Постоянная $r_0 = \infty$

$$\Rightarrow \boxed{\Pi = -\frac{GMm}{r}}$$

§11 Кинетическая энергия

Кинетическая энергия — величина, определяемая скоростью движения тела.

$$K = \frac{mv^2}{2}$$

Закон сохранения энергии

$$m \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F}$$

$$m \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot d\vec{v} = \vec{F} \cdot d\vec{v}$$

$$\Rightarrow \boxed{dK = dA}$$

Теорема о кинетической энергии

$$\vec{r} d\vec{r} = xdx + ydy + zdz = \frac{1}{2} d(\underbrace{x^2 + y^2 + z^2}_{r^2}) = r dr$$

$$\boxed{\vec{r} d\vec{r} = r dr}$$

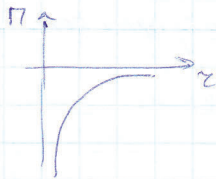
Для $\vec{r}$ вектора скалярное произведение вектора на его приращение равно приращению модуля вектора на приращение модуля.

$$\Rightarrow d\Pi = F dr = G \frac{Mm}{r^2} dr$$

$$\Pi = \int d\Pi = GMm \int \frac{dr}{r^2} = GMm \int_{r_0}^r d\left(-\frac{1}{r}\right) = GMm \left(-\frac{1}{r} + \frac{1}{r_0}\right).$$

Положим $r_0 = \infty$.

$$\Rightarrow \boxed{\Pi = -\frac{GMm}{r}}$$



§11. Кинетическая энергия.

Кинетической энергией материальной точки наз-ся величина, определяемая формулой

$$K = \frac{mv^2}{2} \quad [Дж]$$

Закон изменения кинетической энергии.

$$m \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F} \quad | \cdot \text{умножаем скалярно на } d\vec{r}$$

$$m \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot d\vec{r} = \vec{F} d\vec{r} = dA = m \vec{v} d\vec{v} = m \vec{v} \cdot d\vec{v} = d\left(\frac{mv^2}{2}\right) = dK$$

$$\Rightarrow \boxed{dK = dA} \quad - \text{приращение кинетической энергии материальной точки равно работе действующих на нее сил.}$$

Теорема об изменении кинетической энергии

Кинетическая энергия сист-лы частиц — сумма кинетических энергий отдельных частиц сист-лы

$$K = \sum_i K_i = \frac{1}{2} \sum_i m_i v_i^2$$

Примеры: ① Поступательное движение тела

$$K = \frac{mv^2}{2}$$

② Вращение тела вокруг неподвижной оси.



$$\S 3 \rightarrow v_i = \omega \cdot r_{i\perp}$$

$$K = \frac{\omega^2}{2} \sum_i m_i \cdot r_{i\perp}^2$$

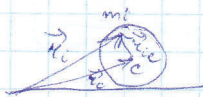
Момент инерции тела (относительно данной оси)

$$J = \sum_i m_i \cdot r_{i\perp}^2 \quad [\text{кг} \cdot \text{м}^2]$$

$$\Rightarrow K = \frac{J\omega^2}{2}$$

③ Плоское движение твердого тела

Плоским движением называется движение тела, при к-ом все точки тела движутся параллельно в некоторой неподвижной плоскости.



$$\vec{v}_i = \vec{v}_c + \vec{v}_{ic}$$

$$\vec{v}_i = \vec{v}_c + \vec{v}_{ic}$$

$$\vec{v}_c = \frac{1}{m} \sum_i m_i \vec{v}_i$$

$$K = \sum_i \frac{m_i v_i^2}{2} = \frac{1}{2} \sum_i m_i \underbrace{\vec{v}_i \cdot \vec{v}_i}_{\text{скалярное произведение}} = \frac{1}{2} \sum_i m_i (\vec{v}_c + \vec{v}_{ic})(\vec{v}_c + \vec{v}_{ic}) =$$

$$= \frac{1}{2} m v_c^2 + \frac{1}{2} \sum_i m_i v_{ic}^2$$

$$\sum_i m_i \vec{v}_{ic} = \sum_i m_i \vec{v}_{ic}$$

$$K = \frac{m v_c^2}{2} + \frac{J \omega^2}{2}$$

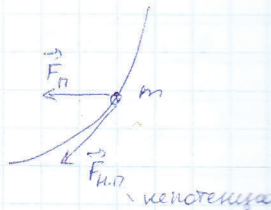
теорема Кюриша

§ 12 Закон сохранения энергии

Полная механическая энергия системы — сумма кинетической и потенциальной энергий

$$E = K + \Pi$$

Закон изменения энергии



$$\Rightarrow dK = -d\Pi + dA_{\text{нп}}$$

$$d(K + \Pi) = dA_{\text{нп}}$$

Изменение энергии при работе

Если нет работы внешних сил, то полная энергия сохраняется

Если $A_{\text{нп}} = 0$, то $d(K + \Pi) = 0$

$$= \frac{1}{2} m v_c^2 + \frac{1}{2} \sum_i m_i v_{ic}^2 + v_c \cdot \underbrace{\sum_i m_i \vec{v}_{ic}}_{=0}$$

$$\sum_i m_i \vec{v}_{ic} = \sum_i m_i (\vec{v}_i - \vec{v}_c) = m \vec{v}_c - m \vec{v}_c = 0.$$

$$K = \frac{m v_c^2}{2} + \frac{J \omega^2}{2}$$

теорема Кюриша

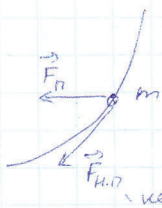
m - масса тела, v_c - скорость центра масс,
 ω - угловая скорость вращения тела,
 J - момент инерции тела относительно
 оси, проходящей через центр масс.

§ 12 Закон сохранения энергии в механике.

Полная механическая энергия - сумма кинетической и потенциальной энергии системы.

$$E = K + \Pi \quad [Дж]$$

Закон изменения полной энергии.



$\vec{F}_{n.p}$ - непотенциальная сила

$$dK = dA = \vec{F} d\vec{r} = \underbrace{\vec{F}_n \cdot d\vec{r}}_{-d\Pi} + \underbrace{\vec{F}_{n.p} \cdot d\vec{r}}_{dA_{n.p}} =$$

$$\Rightarrow dK = -d\Pi + dA_{n.p}$$

$$d(K + \Pi) = \boxed{dF = dA_{n.p}}$$

Изменение полной механической энергии системы =
 работе непотенциальных сил. — закон изменения полной энергии.

Если же работа непотенциальных сил $= 0$, то
 полная механическая энергия системы сохраняется.

Если $A_{n.p} = 0$, то $\boxed{E = K + \Pi = const}$ — закон сохранения энергии в механике

Момент импульса частицы и системы частиц. Закон сохранения энергии в теории относительности.

Если $\vec{F}_{\text{внеш}} = 0$, то $E = \sum_i \frac{m_i c^2}{\sqrt{1 - \frac{v_i^2}{c^2}}} = \text{const}$ - релятивистская энергия системы.

В этом случае сохраняется также и релятивистский импульс системы.

$$\vec{p} = \sum_i \frac{m_i \vec{v}_i}{\sqrt{1 - \frac{v_i^2}{c^2}}} = \text{const} \quad \text{— релятивистский импульс}$$

m_i - масса частицы, $\vec{v}_i$ - её скорость, c - скорость света.

Эти 2 закона всегда действуют вместе.

Закон сохранения энергии в теории относительности является следствием закона сохранения импульса и принципа относительности.

Пример. неупругий удар.

m, v

m, v

M, V

$$\frac{m\vec{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{M\vec{V}}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \Rightarrow \vec{V} = 0$$

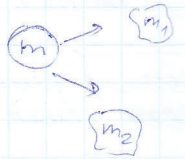
$$\frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} + \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{Mc^2}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \rightarrow M = \frac{2m}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} > 2m (!)$$

Теория относительности приводит к выводу о том, что происходит взаимное превращение массы и энергии.

Факты, подтверждающие:

① никакое тело равной скорости

② деление ядер



③ световое давление

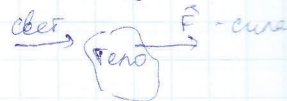
$$\vec{p} = \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

$$\begin{cases} \vec{p} \cdot c^2 = E \cdot \vec{v} \\ E^2 - p^2 c^2 = m^2 c^4 \end{cases}$$

Пусть $m = 0$.

$$E = pc, \quad v = c$$

Частицу с такой



$$F = \dot{p} = \frac{\dot{E}}{c} = \frac{P}{c}$$

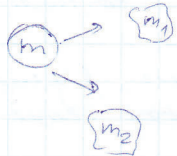
P - мощность

$$F = \frac{10^3 \text{ Вт}}{3 \cdot 10^8 \frac{\text{м}}{\text{с}}} = 3 \cdot 10^{-6} \text{ Н}$$

Факты, подтверждающие теорию относительности.

① никакое тело невозможно разогнать до скорости, равной скорости света ($v < c$)

② деление ядер урана



$$E = c^2 \Delta m \leftarrow \text{ф-ла Эйнштейна}$$

$$\Delta m = m - m_1 - m_2 \leftarrow \text{дефект масс}$$

$$E_0 = m_0 c^2 \leftarrow \text{энергия покоя}$$

?

③ световое давление

$$\vec{p} = \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad E = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{p} \cdot c^2 = E \vec{v} \\ E^2 - p^2 c^2 = m^2 c^4 \end{array} \right. \quad \frac{\frac{m^2 c^4}{1 - \frac{v^2}{c^2}} - \frac{m^2 v^2 c^2}{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 - \frac{v^2}{c^2}} = m^2 c^4$$

Пусть $m=0$.

$$E = pc, \quad v=c$$

Частицу с такими св-вами назовём фотоном.

свет $\rightarrow$ $\vec{F}$ - сила светового давления

$$F = \dot{p} = \frac{\dot{E}}{c} = \frac{P}{c}$$

P - мощность света $P = 10^3 \text{ Вт}$

$$F = \frac{10^3 \text{ Вт}}{3 \cdot 10^8 \frac{\text{м}}{\text{с}}} = 3 \cdot 10^{-6} \text{ Н (!)}$$

§ 13. Момент импульса частицы и системы частиц. Момент силы

Момент импульса частицы - векторное произведение радиус-вектора частицы на вектор импульса.

$$\vec{N} = [\vec{r}, m\vec{v}] - \text{момент импульса.} \quad [\text{кг} \cdot \text{м}^2 \cdot \text{с}^{-1}]$$

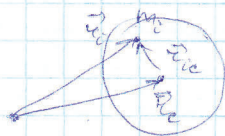
Момент силы - векторное произведение радиус-вектора точки приложения силы на вектор силы.

$$\vec{M} = [\vec{r}, \vec{F}] \quad [\text{Н} \cdot \text{м}] = [\text{Дж} \cdot \text{с}]$$

Момент импульса системы частиц - сумма моментов импульса отдельных частиц системы.

$$\vec{N} = \sum_i \vec{N}_i = \sum_i [\vec{r}_i, m_i \vec{v}_i]$$

Выразим эту величину через характеристики вращения центра масс ($\vec{r}_c = \frac{1}{m} \sum_i m_i \vec{r}_i$, $\vec{v}_c = \frac{1}{m} \sum_i m_i \vec{v}_i$, $m = \sum_i m_i$).



$$\vec{r}_i = \vec{r}_c + \vec{r}_{ic}$$

$$\vec{v}_i = \vec{v}_c + \vec{v}_{ic}$$

$$\begin{aligned} \vec{N} &= \sum_i m_i [\vec{r}_c + \vec{r}_{ic}, \vec{v}_c + \vec{v}_{ic}] = [\vec{r}_c, m\vec{v}_c] + \sum_i [\vec{r}_{ic}, m_i \vec{v}_{ic}] + \\ &+ [\underbrace{\vec{r}_c, \sum_i m_i \vec{v}_{ic}}_0] + [\underbrace{\sum_i m_i \vec{r}_{ic}, \vec{v}_c}_0] \end{aligned}$$

$$\sum_i m_i \vec{r}_{ic} = \sum_i m_i (\vec{r}_i - \vec{r}_c) = \sum_i m_i \vec{r}_i - m\vec{r}_c = 0$$

$$\vec{N} = \vec{N}_c + \vec{N}_{oc}$$

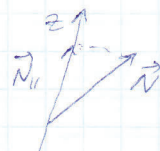
относительно центра

$$\vec{N}_c = [\vec{r}_c, m\vec{v}_c]$$

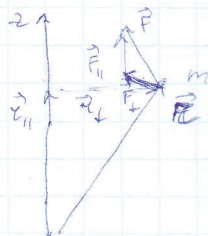
$$\vec{N}_{oc} = \sum_i [\vec{r}_{ic}, m_i \vec{v}_{ic}]$$

Момент силы относительно

момента силы относительно



Момент силы



$$\vec{M}_{||} = [\vec{r}_{\perp}, \vec{F}_{\perp}]$$

Аналогично для

вращения тела вокруг



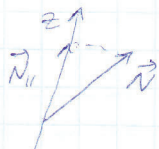
$$= \sum_i m_i \{ \vec{\omega} \cdot \vec{r}_{ic} - \dots \}$$

$$\Rightarrow \vec{N}_{||} = \vec{\omega} \cdot \sum_i m_i \vec{r}_{ic}$$

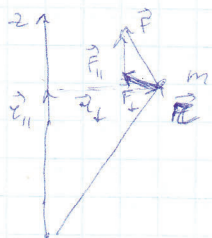
$$|\vec{N}_{||}| = J \vec{\omega}$$

Момент относительно оси.

Моментом относительно оси называют какую-либо проекцию вектора момента на эту ось.



Момент силы относительно оси



$$\vec{r} = \vec{r}_{||} + \vec{r}_{\perp}$$

$$\vec{F} = \vec{F}_{||} + \vec{F}_{\perp}$$

$$\begin{aligned}\vec{M} &= [\vec{r}, \vec{F}] = [\vec{r}_{||} + \vec{r}_{\perp}, \vec{F}_{||} + \vec{F}_{\perp}] = \\ &= \underbrace{[\vec{r}_{||}, \vec{F}_{||}]}_0 + \underbrace{[\vec{r}_{\perp}, \vec{F}_{\perp}]}_{\vec{M}_{||}} + \underbrace{[\vec{r}_{||}, \vec{F}_{\perp}]}_{\vec{M}_{\perp}} + \underbrace{[\vec{r}_{\perp}, \vec{F}_{||}]}_{\vec{M}_{\perp}}\end{aligned}$$

$$\vec{M}_{||} = [\vec{r}_{\perp}, \vec{F}_{\perp}]$$

Аналогично для момента импульса: $\vec{N}_{||} = \sum_i [\vec{r}_{i\perp}, m_i \vec{v}_{i\perp}]$

Вращение тела вокруг неподвижной оси.



$$\vec{v}_{i\perp} = [\vec{\omega}, \vec{r}_{i\perp}]$$

(S3)

$$\vec{N}_{||} = \sum_i m_i [\vec{r}_{i\perp}, [\vec{\omega}, \vec{r}_{i\perp}]] =$$

$$= \sum_i m_i \{ \vec{\omega} \cdot \vec{r}_{i\perp}^2 - \underbrace{\vec{r}_{i\perp} \cdot (\vec{r}_{i\perp} \cdot \vec{\omega})}_0 \}$$

$$\Rightarrow \vec{N}_{||} = \vec{\omega} \cdot \sum_i m_i r_{i\perp}^2$$

$$\boxed{\vec{N}_{||} = J \vec{\omega}}$$

$J = \sum_i m_i r_{ci}^2$ - момент инерции

Плоское движение твёрдого тела

$$\vec{N} = \vec{N}_c + \vec{N}_{oc}$$

$$\vec{N}_{oc} = \vec{N}_{c\perp} + \vec{N}_{c\parallel}$$

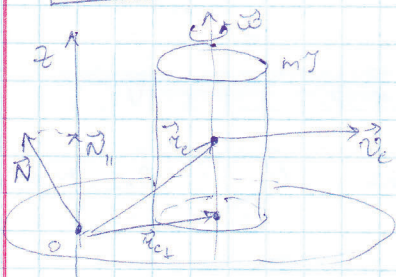
$$\vec{N}_{c\parallel} = [\vec{r}_{c\perp}, m\vec{v}_{c\perp}]$$

$$\vec{v}_{c\perp} = \vec{v}_c$$

$$\vec{N}_{c\perp} = [\vec{v}_{c\perp}, m\vec{v}_c]$$

$$\vec{N}_{c\parallel} = J\vec{\omega} \quad (J = J_c)$$

$$\vec{N}_{oc} = [\vec{v}_{c\perp}, m\vec{v}_c] + J\vec{\omega}$$



§14. Теорема моментов. Закон сохранения момента импульса.

$$\vec{N} = [\vec{r}, m\vec{v}]$$

Каждому $\dot{\vec{N}}$ - скорость изменения момента импульса

$$\dot{\vec{N}} = [\dot{\vec{r}}, m\vec{v}] + [\vec{r}, m\dot{\vec{v}}]$$



$$\dot{\vec{N}} = [\dot{\vec{r}}, \vec{p}] = \vec{M}$$

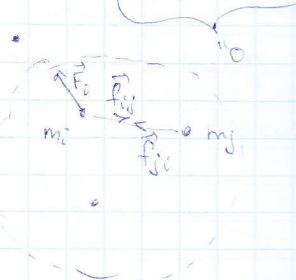
$$\Rightarrow \vec{N} = \vec{M}$$

Скорость изменения момента импульса

Для системы частиц

$$\vec{N} = \sum_i [\vec{r}_i, m_i \vec{v}_i]$$

$$\dot{\vec{N}} = \sum_i [\dot{\vec{r}}_i, m_i \vec{v}_i] + [\vec{r}_i, m_i \dot{\vec{v}}_i]$$



Суммарной момент импульса, т.е. $\vec{M}_{внутр} = 0$



$$\Rightarrow \dot{\vec{M}}_{внутр} = \sum_i \sum_j \vec{M}_{ij}$$

$$\dot{\vec{N}} = \dot{\vec{M}}_{внеш}$$

Скорость изменения внешнего момента импульса

Если нет суммарного внешнего момента

$$\Rightarrow \vec{N} = \dot{\vec{M}}$$

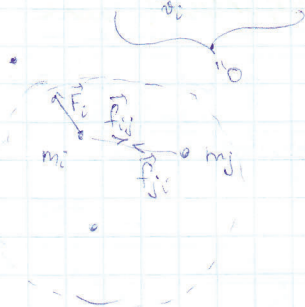
теорема момента

Скорость изменения момента импульса системы равно моменту действующих на нее сил

Для системы частиц

$$\vec{N} = \sum_i [\vec{r}_i, m_i \vec{v}_i]$$

$$\dot{\vec{N}} = \sum_i [\dot{\vec{r}}_i, m_i \vec{v}_i] + \sum_i [\vec{r}_i, m_i \dot{\vec{v}}_i]$$



$$m_i \dot{\vec{v}}_i = \vec{F}_i + \sum_j \vec{F}_{ij}$$

$$\dot{\vec{N}} = \sum_i [\vec{r}_i, \vec{F}_i + \sum_j \vec{F}_{ij}] = \vec{M}_{внеш} + \vec{M}_{внутр}$$

Суммарный момент внутренних сил равен нулю, т.е. $\vec{M}_{внутр} = 0$



$$\vec{M}_{ij} = [\vec{r}_i, \vec{F}_{ij}] + [\vec{r}_j, \vec{F}_{ji}] = 0$$

$$\vec{F}_{ij} = -\vec{F}_{ji}$$

$$= [\vec{r}_i, \vec{F}_{ij}] - [\vec{r}_j, \vec{F}_{ij}] = [\vec{r}_i - \vec{r}_j, \vec{F}_{ij}] = 0$$

$$\Rightarrow \vec{M}_{внутр} = \sum_i \sum_j \vec{M}_{ij} = 0$$

$$\boxed{\dot{\vec{N}} = \vec{M}_{внеш}}$$

- теорема моментов для системы частиц

Скорость изменения момента импульса системы равно сумме моментов внешних сил

Если же сумма моментов внешних сил = 0, то момент импульса системы сохраняется

Если $\vec{M}_{\text{внеш}} = 0$, то $\vec{N} = \sum [\vec{r}_i, m_i \vec{v}_i] = \text{const}$

Более сильная формулировка:

Если $\exists$ такая ось, относительно которой сумма моментов внешних сил равна нулю, то относительно этой оси момент импульса системы сохраняется.

Если $M_{\text{внеш}}^{(z)} = 0$, то $N_z = \text{const}$.

§ 15. Материальная точка в центральном поле

поле сил, направленной в сторону ^{всегда} точки и той же точки, направленной силовым центром.

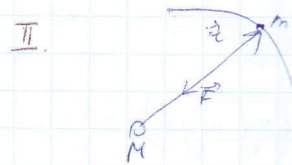
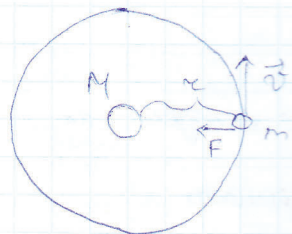
Пример: поле гравитации Солнца.

Законы Кеплера:

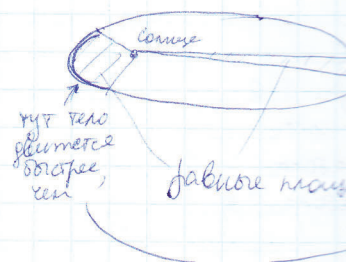
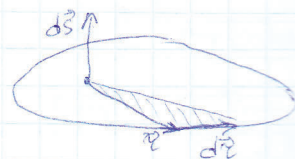
- I. Планеты солнечной системы движутся по эллипсам, в одном фокусе которых находится Солнце.
- II. Радиус-вектор планет описывает равные площади за равные промежутки времени.
- III. Квадраты периодов обращения планет относятся, как кубы больших полуосей их эллиптических орбит.

Ньютон показал, что эти законы являются следствием основных законов механики (т.е. законов Кеплера + закона всемирного тяготения).

III. Введем его для круговой орбиты.



- => 1) движение по
- 2) при таком движении

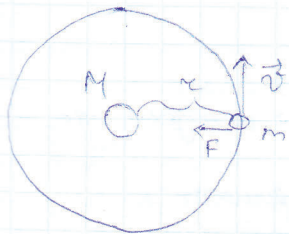


I. для движения механически

$$\vec{N} = [\vec{r}, m \vec{v}]$$

$$E = \frac{mv^2}{2} + \Pi$$

$$\Pi = -G \frac{Mm}{r}$$



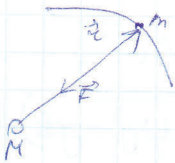
$$m \frac{v^2}{r} = G \frac{Mm}{r^2} \rightarrow v^2 = G \frac{M}{r}$$

$$T = \frac{2\pi r}{v} \rightarrow v = \frac{2\pi r}{T}$$

$$\frac{4\pi^2 r^2}{T^2} = G \frac{M}{r}$$

$$T^2 = \frac{4\pi^2 r^3}{GM} \Rightarrow T^2 \sim r^3$$

II.

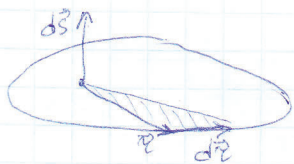


$$\dot{\vec{N}} = \dot{\vec{M}} = [\dot{\vec{r}}, \vec{p}] = 0$$

$$\Rightarrow \vec{N} = \text{const} = [\vec{r}, m\vec{v}]$$

$\Rightarrow$ 1) движение происходит в плоскости.

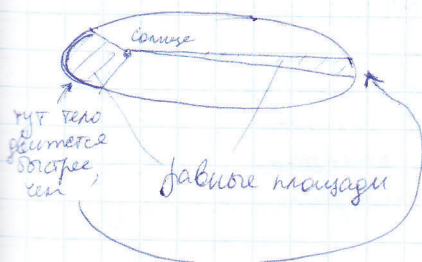
2) при таком движении сохраняется секторная скорость.



$$d\vec{S} = \frac{1}{2} [\vec{r}, d\vec{r}] - \text{секторная площадь}$$

$$\frac{d\vec{S}}{dt} \equiv \vec{\omega} = \frac{1}{2} [\dot{\vec{r}}, \vec{r}] = \frac{\dot{\vec{N}}}{2m} = \text{const} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{\omega} = \text{const}}$$



I

При движении в центральном поле сохраняется полная механическая энергия.

$$\vec{N} = [\vec{r}, m\vec{v}] = \text{const}$$

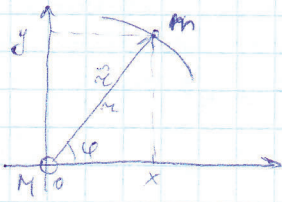
$$E = \frac{mv^2}{2} + \Pi,$$

$$\Pi = -G \frac{Mm}{r}, \text{ пусть } A \equiv GMm.$$

$$E = \frac{mv^2}{2} - \frac{A}{r} = \text{const.}$$

Введём полярную систему координат с центром на Солнце.

r, φ — полярные координаты.



$$\begin{cases} x = r \cos \varphi \\ y = r \sin \varphi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x} = \dot{r} \cos \varphi - r \dot{\varphi} \sin \varphi \\ \dot{y} = \dot{r} \sin \varphi + r \dot{\varphi} \cos \varphi \end{cases}$$

$$v^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 = \dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2$$

$$\vec{N} = [\vec{r}, m\vec{v}] = m \cdot \begin{vmatrix} \vec{r} & \vec{v} \\ x & \dot{x} \\ y & \dot{y} \end{vmatrix} = \vec{k} m (x\dot{y} - y\dot{x}) =$$

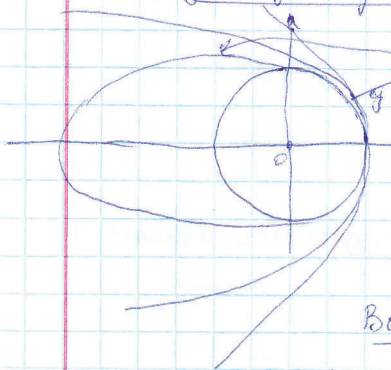
$$= \vec{k} \cdot m \cdot r^2 \cdot \dot{\varphi}$$

$$N = \vec{k} \cdot m \cdot r^2 \cdot \dot{\varphi}$$

$$\begin{cases} E = \frac{m}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2) - \frac{A}{r} = \text{const} \\ N = m r^2 \cdot \dot{\varphi} = \text{const.} \end{cases}$$

Уравнение траектории
Допустим парабола: $r = r(\varphi)$
 $r = \frac{\rho}{1 + \varepsilon \cos \varphi}$

Виды траекторий.



Окружность при $\varepsilon = 0$.

$0 < \varepsilon < 1$ — эллипс

$\varepsilon = 1$ — парабола

$\varepsilon > 1$ — гипербола

ρ — фокальный параметр орбиты
 ε — эксцентриситет

Выведем это уравнение.

$$\begin{cases} N = m r^2 \cdot \dot{\varphi} \\ E = \frac{m}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2) - \frac{A}{r} \end{cases} \rightarrow \dot{\varphi} = \frac{N}{m r^2}$$

$$\frac{dE}{m} = \dot{r}^2 + \frac{N^2}{m^2 r^2}$$

Выведем $\dot{r}$:

$$\dot{\varphi} = \frac{N}{m r^2} = \frac{d\varphi}{dt}$$

используем формулу

$$\frac{dr}{d\varphi} = \pm \frac{m r^2}{N} \sqrt{\frac{dE}{m} - \frac{N^2}{m^2 r^2}}$$

$$\frac{dr}{d\varphi} = \pm r^2 \sqrt{\frac{dE}{m} - \frac{N^2}{m^2 r^2}}$$

$$\pm d\varphi = \frac{dr}{r^2 \sqrt{\frac{dE}{m} - \frac{N^2}{m^2 r^2}}}$$

Введём переменную

$$\pm d\varphi = \frac{ds}{\sqrt{\frac{2mE}{N^2} + \frac{2m}{N^2} s}}$$

$$\frac{2mE}{N^2} + \frac{2mA}{N^2} = s$$

$$= \frac{2mE}{N^2} + \frac{m^2 A^2}{N^4} = a^2$$

$$\pm d\varphi = \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} =$$

$$\Rightarrow \pm \varphi = \arcsin \frac{x}{a}$$

$$\frac{2E}{m} = \dot{r}^2 + \frac{N^2}{m^2 r^2} - \frac{2A}{mr}$$

Богерум $\dot{r}$: $\dot{r} = \pm \sqrt{\frac{2E}{m} + \frac{2A}{mr} - \frac{N^2}{m^2 r^2}} = \frac{dr}{dt}$

$$\dot{\varphi} = \frac{N}{mr^2} = \frac{d\varphi}{dt}$$

используем формулу.

$$\odot \frac{dr}{d\varphi} = \pm \frac{mr^2}{N} \sqrt{\frac{2E}{m} + \frac{2A}{mr} - \frac{N^2}{m^2 r^2}}$$

$$\frac{dr}{d\varphi} = \pm r^2 \sqrt{\frac{2mE}{N^2} + \frac{2mA}{N^2 r} - \frac{1}{r^2}}$$

$$\pm d\varphi = \frac{dr}{r^2 \sqrt{\frac{2mE}{N^2} + \frac{2mA}{N^2 r} - \frac{1}{r^2}}}$$

Введем переменную $s = \frac{1}{r} \rightarrow ds = -\frac{dr}{r^2}$

$$\pm d\varphi = \frac{ds}{\sqrt{\frac{2mE}{N^2} + \frac{2mA}{N^2} \cdot s - s^2}}$$

Богерум константы интегрирования.

$$\begin{aligned} \frac{2mE}{N^2} + \frac{2mA}{N^2} \cdot s - s^2 &= \frac{2mE}{N^2} - (s^2 - 2s \frac{mA}{N^2} + \frac{m^2 A^2}{N^4} - \frac{m^2 A^2}{N^4}) = \\ &= \underbrace{\frac{2mE}{N^2} + \frac{m^2 A^2}{N^4}}_{= a^2} - \underbrace{(s - \frac{mA}{N^2})^2}_{= x} \end{aligned}$$

$$\pm d\varphi = \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = d(\arcsin \frac{x}{a})$$

$$\sin \varphi = \frac{x}{a} \rightarrow x = a \cdot \sin \varphi \rightarrow dx = a \cos \varphi d\varphi = a \sqrt{1 - \sin^2 \varphi} d\varphi = a \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} d\varphi = \sqrt{a^2 - x^2} d\varphi$$

$$\Rightarrow \pm \varphi = \arcsin \frac{x}{a} + \text{Const}$$

↑
Богерум $\frac{1}{r}$

↑
 $-\frac{1}{2}\pi$

$$\frac{\pi}{2} - \varphi = \arcsin \frac{x}{a}$$

$$\sin(\frac{\pi}{2} - \varphi) = \cos \varphi = \frac{x}{a} \Rightarrow |x| = a \cdot \cos \varphi$$

$$x = S - \frac{mA}{N^2} = a \cdot \cos \varphi.$$

$$a \cdot \cos \varphi = \frac{1}{\varepsilon} - \frac{mA}{N^2},$$

$$\frac{1}{\varepsilon} = \frac{mA}{N^2} + a \cdot \cos \varphi$$

$$\varepsilon = \frac{1}{\frac{mA}{N^2} + a \cdot \cos \varphi} = \frac{\frac{N^2}{mA}}{1 + a \cdot \frac{N^2}{mA} \cdot \cos \varphi}$$

$$\boxed{\varepsilon = \frac{\rho}{1 + \varepsilon \cdot \cos \varphi}, \text{ где } \rho = \frac{N^2}{mA}, \quad \varepsilon = a \cdot \frac{N^2}{mA}}$$

§ 16. Плоское движение твёрдого тела.

движение, при кот. все точки тела движутся // некоторой неподвижной плоскости.



I. Уравнение движения центра масс.

$$m \vec{a}_c = \vec{F}_{\text{внеш.}}$$

II. Уравнение вращения.

$$\vec{N} = \vec{M}_{\text{внеш.}}$$

1) вращение вокруг неподвижной оси.



$$\vec{N}_{||} = \vec{M}_{||}$$

$$\vec{N}_{||} = J \vec{\omega}$$

$$J \dot{\vec{\omega}} = \vec{M}_{||}$$

Введём угловое ускорение $\vec{\varepsilon} = \dot{\vec{\omega}} = \frac{d\omega}{dt}$

$$\Rightarrow \boxed{J \vec{\varepsilon} = \vec{M}_{||}}$$

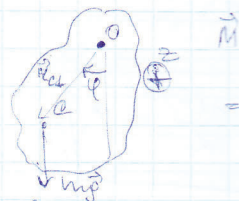
Спроецируем на ось z

$$J \varepsilon_z = M_z$$

$$\varepsilon_z = \ddot{\varphi} = \ddot{\varphi}$$

Направление оси z
правилом правой

Прав. фигура



Суммарный момент
таков, как если
центр масс.

$$\vec{M}_{||} = [\vec{r}_{c\perp}, m \vec{r}]$$

$$J \varepsilon_z = J \ddot{\varphi} = M_z$$

$$r_{c\perp} = l$$

$$J \ddot{\varphi} = - l \cdot m g \cdot \sin \varphi$$

$$\ddot{\varphi} = - \frac{m g l}{J} \cdot \sin \varphi$$

§ 17. Момент

$$J = \sum m_i r_{i\perp}^2$$

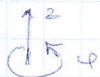


Спроектируем на ось вращения z :

$$J_{\Sigma z} = M_z$$

$$\Sigma z = \ddot{\omega}_z = \ddot{\varphi}$$

Направление оси z связано с углом поворота φ правилом правого винта.



Пример. физический маятник.



$$\begin{aligned} \vec{M} &= \sum_i [\vec{r}_i, m_i \vec{g}] = [\sum_i m_i \vec{r}_i, \vec{g}] = \\ &= [m \vec{r}_c, \vec{g}] = [\vec{r}_c, m \vec{g}] \end{aligned}$$

Суммарная масса сил тяжести, действующих на тело, такова как если бы вся масса тела находилась в его центре масс.

$$\vec{M}_H = [\vec{r}_{c\perp}, m \vec{g}]$$

$$J \ddot{\varphi} = J \ddot{\varphi} = M_z = -r_{c\perp} \cdot m g \cdot \sin \varphi$$

$$r_{c\perp} = l$$

$$J \ddot{\varphi} = -l \cdot m g \cdot \sin \varphi$$

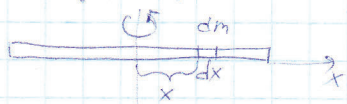
$$\ddot{\varphi} + \frac{mgl}{J} \cdot \sin \varphi = 0.$$

§ 17. Момент инерции Кёйрдао тела.

$$J = \sum_i m_i r_{i\perp}^2$$



① Прямой стержень



m, l - дано.
 $J = ?$

$$J = \int dJ$$

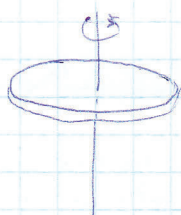
$$dJ = x^2 dm$$

$$dm = \frac{m}{l} dx$$

$$dJ = \frac{m}{l} x^2 dx$$

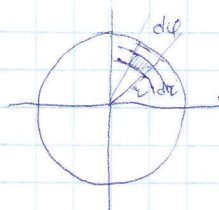
$$J = \int dJ = \frac{m}{l} \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} x^2 dx = \frac{m}{l} \cdot \frac{1}{3} \left[\frac{l^3}{8} + \frac{l^3}{8} \right] = \boxed{\frac{ml^2}{12} = J}$$

② Диск



m, R - дано $J = ?$

$$J = \int dJ$$



r, φ

$r+dr, \varphi+d\varphi$

$dS = r dr d\varphi$, т.к. площадь дуги при радиусе r и угле $d\varphi$ равна $r d\varphi$.

$$dm = \frac{m}{S} dS$$

$$dJ = dm \cdot r^2 = \frac{m}{S} r^3 dr d\varphi$$

$$J = \int dJ = \frac{m}{S} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R r^3 dr = \frac{m}{S} \cdot 2\pi \cdot \frac{R^4}{4}$$

$$S = \int dS = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R r dr = \pi R^2 \quad \text{— проверено!}$$

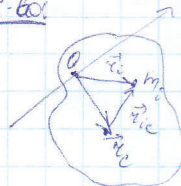
$$J = \frac{m}{JR^2} \cdot 2\pi \frac{R^4}{4} =$$

Теорема Штейнера
относительно
центрального
момента инерции
относительно
любого параллельного
оси вращения
плоскости.

т.е. $J = J_c + ma^2$



Рок-бей



$$J = \sum_i m_i (\vec{r}_{ci}^2 + \vec{r}_{ci}^2)$$

$$+ 2 \vec{r}_{c1} \sum_i m_i \vec{r}_{ci1}$$

$$\sum_i m_i \vec{r}_{ci1}^2 = \sum_i m_i$$

$$\Rightarrow \boxed{J = J_c + ma^2}$$

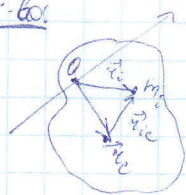
$$J = \frac{m}{JR^2} \cdot 2J \frac{R^4}{4} = \frac{mR^2}{2} = J$$

Теорема Гюйгенса-Штейнера: момент инерции тела относительно произвольной оси равен моменту инерции относительно оси, проходящей через центр масс тела $\parallel$ данной + полная масса тела, умноженная на квадрат расстояния между осями.

т.е. $J = J_c + ma^2$, a - расстояние между осями.



Док-во:



$$\vec{r}_i = \vec{r}_c + \vec{r}_{ic}$$

$$J = \sum_i m_i r_{iL}^2$$

$$\vec{r}_{iL} = \vec{r}_{cL} + \vec{r}_{icL}$$

$$r_{iL}^2 = \vec{r}_{iL} \cdot \vec{r}_{iL}$$

скалярное
произведение

$$J = \sum_i m_i (\vec{r}_{cL} + \vec{r}_{icL}) \cdot (\vec{r}_{cL} + \vec{r}_{icL}) = m r_{cL}^2 + \underbrace{\sum_i m_i r_{icL}^2}_{J_c} +$$

$$+ 2 \vec{r}_{cL} \cdot \underbrace{\sum_i m_i \vec{r}_{icL}}_{=0}$$

$$\sum_i m_i \vec{r}_{icL} = \sum_i m_i (\vec{r}_i - \vec{r}_c) = m \vec{r}_c - m \vec{r}_c = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{J = J_c + ma^2} \quad \text{т.т.т.}$$

Пример: обруч.



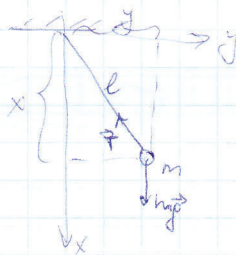
m, R

$$J = mR^2 + mR^2 = 2mR^2$$

§18. Системы со связями. Степени свободы. Обобщенные координаты.

Связи — не вытекающие из уравнения движения ограничения на координаты, скорости и ускорения точек механической системы.

Пример: плоский математический маятник.



$$x^2 + y^2 = l^2 \text{ — уравнение связи}$$

Заряженные силы — известное постоянное силос или известное функции координат и скоростей частиц. $\vec{F}$

Для маятника, например, это сила тяжести $m\vec{g}$.

Для пружины — это сила упругости (т.к. ее всегда можно найти по закону Гука).

Силос реакции — силос, с кот. тела, соприкасающиеся связи, действуют на тела сис-мы. $\vec{R}$

Для маятника это сила натяжения нити.

Задача механики сис-мы и с уравнениями

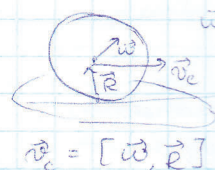
Для маятника:

Классификация

- 1) полное
- 2) стационарное

Связь наг-а ограничению то

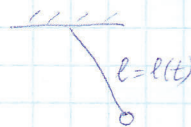
Пример кинематического



$$\vec{v}_c = [\vec{\omega}, \vec{r}]$$

Стационарные связи не содержат времени

Пример нестационарных связей по времени



Число степеней свободы, координат, положений сис-мы в пространстве и сис-мы

Обобщенные координаты

Задача механики. — отыскание закона движения системы и сил реакции по заданным силам и уравнениям связи.

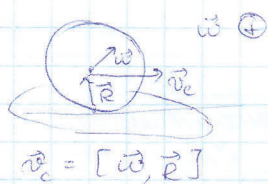
Для маятника: $x(t)$ — ? $y(t)$ — ? φ — ?

Классификация связей:

- 1) holonomic и nonholonomic
- 2) stationary и nonstationary

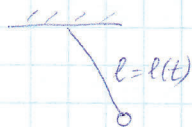
Связь называется holonomic, если она сводится к ограничению только на координаты тел. (например, маятник)

Пример nonholonomic связи — качение шара без проскальзывания (не по прямой линии)



Stationary связь — связь, если уравнение связи не содержит времени в явном виде. (пример — маятник)

Пример nonstationary связи — маятник, у которого длина меняется по заданному закону



Число степеней свободы. — число независимых координат, полностью определяющих положение системы в пр-ве $\mathbb{R}^3$.
Для n систем такое число $\mathbb{Z}$

Обобщенные координаты — $n+3$ координат, полностью определяющие положение системы в пр-ве. $q_1, q_2, \dots, q_{n+3} = \{ \theta \}$

Обобщенные скорости — производные обобщенных координат по времени. $\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_s = \{ \dot{q} \}$

Число степеней свободы можно вычислить по формуле:

$$S = 3N - K, \text{ где}$$

N — число точек сис. мтв,
 K — число связей

Пример:

$S=3$

$S=6$

$S=5$

$S=6=9-3$

$S=6$

Св-ва обобщенных координат:

- ① координаты точек сис. мтв св-ва однозначности ф-циями набора обобщенных координат.

$$\vec{r}_l = \vec{r}_l(q_1, q_2, \dots, q_s, t)$$

$l=1, 2, \dots, N$, N — число точек

- ② обобщенные координаты образуют в точности уравнения связей



$$S=1, \text{ т.к. } x^2 + y^2 = l^2 \text{ и } z=0.$$

$$\dot{q} = \dot{\varphi}$$

$$x = l \cos \varphi$$

$$y = l \sin \varphi$$

$$x^2 + y^2 = l^2$$

§19. Виртуальная работа.

Виртуальное перемещение перемещение данной точки фиксированной системы

$$\delta \vec{r}_l = \sum_{j=1}^s \frac{\partial \vec{r}_l}{\partial q_j} \delta q_j$$

производная, которая берется по всем обобщенным координатам дифференцируемые

вектор виртуального перемещения

Виртуальная работа перемещения

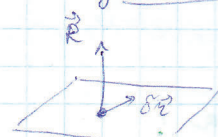
$$\delta A = \vec{F} \cdot \delta \vec{r}$$

идеальное связывание с реакцией

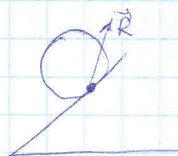
$$\delta A_c = \sum_{l=1}^N \vec{R}_l \cdot \delta \vec{r}_l$$

Примеры:

- ① идеальное связывание



- ② качение без проскальзывания



§19. Виртуальные перемещения. Виртуальная работа. Идеальное связи.

Виртуальное перемещение — воображаемое бесконечно малое перемещение точки, допускаемое связью в данной фиксированной момент времени t .

$$\delta \vec{r}_i = \sum_{j=1}^s \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j \quad (\text{частная производная — это}$$

производная, кот. вычисляется при фиксированных значениях всех переменных, кроме той, по кот. дифференцируют)

Вектор виртуального перемещения.

Виртуальная работа — работа силы на виртуальном перемещении.

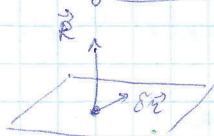
$$\delta A = \vec{F} \cdot \delta \vec{r}$$

Идеальное связи — связи, для кот. виртуальная работа сил реакции равна 0.

$$\delta A_c = \sum_{i=1}^N \vec{R}_i \cdot \delta \vec{r}_i = 0.$$

Примеры

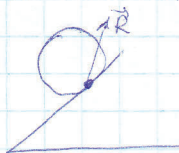
① идеальная гладкая поверхность.



$$\delta A_R = \vec{R} \cdot \delta \vec{r} = 0$$

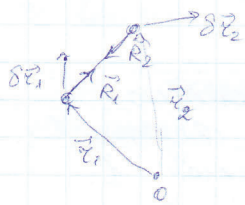
$R \perp$ к-ти, т.к. кот сила реакции — перпендикулярная составляющей силы реакции.

② качение без проскальзывания



$$\delta A_R = \vec{R} \cdot \delta \vec{r} = 0, \text{ т.к. } \delta \vec{r} = 0$$

③ жесткая невесомая стержень:



$$\delta A_R = \vec{R}_1 \cdot \delta \vec{r}_1 + \vec{R}_2 \cdot \delta \vec{r}_2 = 0$$

$\vec{R}_1 = -\vec{R}_2$ по 3-му закону Ньютона

$$\Leftrightarrow \vec{R}_1 \delta \vec{r}_1 - \vec{R}_1 \delta \vec{r}_2 = \vec{R}_1 \delta(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) = 0$$

$\vec{R}_1 = \alpha \vec{r}$ - направлена вдоль стержня

$$\Leftrightarrow \alpha \vec{r} \delta \vec{r} = \frac{\alpha}{2} \delta(r^2) = 0$$

09.11.

§20 Уравнение Лагранжа. Обобщенные силы.

Рассм. систему обобщенных координат:

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{r}_l = \vec{r}_l(q_1, q_2, \dots, q_s, t) \text{ - вирт. перемещение} \\ \delta \vec{r}_l = \sum_{j=1}^s \frac{\partial \vec{r}_l}{\partial q_j} \delta q_j \text{ (идеальное связки не смотрим)} \\ \delta A_R = \sum_{l=1}^N \vec{R}_l \delta \vec{r}_l = 0 \end{array} \right.$$

$$m_l \ddot{\vec{r}}_l = \vec{F}_l + \vec{R}_l \quad l=1, 2, \dots, N \text{ - закон Ньютона}$$

Уравнение Даламбера-Лагранжа:

$$\sum_{l=1}^N (m_l \ddot{\vec{r}}_l - \vec{F}_l) \delta \vec{r}_l = 0 \quad \text{- в это ур-ние еще не входит сила реакции } \vec{R}$$

$$\sum_{l=1}^N (m_l \ddot{\vec{r}}_l - \vec{F}_l) \delta \vec{r}_l = 0$$

$$\sum_{j=1}^s (X_j - Q_j) \delta q_j = 0$$

Из независимости следует, что

Покажем, что

$$X_j = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial K}{\partial \dot{q}_j} \right)$$

Выразим

и обобщ.

$$\vec{r}_l = \vec{r}_l(q_1, q_2, \dots, q_s, t)$$

$$\vec{v}_l = \dot{\vec{r}}_l = \sum_{j=1}^s \frac{\partial \vec{r}_l}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial \vec{r}_l}{\partial t}$$

$$\sum_{l=1}^N (m_l \ddot{\vec{r}}_l - \vec{F}_l) \sum_{j=1}^S \frac{\partial \vec{r}_l}{\partial q_j} \delta q_j = 0$$

$$\sum_{j=1}^S \delta q_j \sum_{l=1}^N (m_l \ddot{\vec{r}}_l - \vec{F}_l) \frac{\partial \vec{r}_l}{\partial q_j} = 0 \quad \leftarrow \begin{array}{l} \text{степеней} \\ \text{свободы и } j \end{array}$$

$$\sum_{l=1}^N (m_l \ddot{\vec{r}}_l - \vec{F}_l) \frac{\partial \vec{r}_l}{\partial q_j} = \underbrace{\sum_{l=1}^N m_l \ddot{\vec{r}}_l \frac{\partial \vec{r}_l}{\partial q_j}}_{X_j} + \underbrace{\sum_{l=1}^N \vec{F}_l \frac{\partial \vec{r}_l}{\partial q_j}}_{Q_j}$$

$$\sum_{j=1}^S (X_j - Q_j) \delta q_j = 0$$

Из независимости обобщ. координат

следует, что $X_j = Q_j$, $j = 1, 2, \dots, S$.

Покажем, что X_j может быть выражена
через кинетич. энергию системы:

$$X_j = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial K}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial K}{\partial q_j}; \quad K = \frac{1}{2} \sum_{l=1}^N m_l v_l^2 = \frac{1}{2} \sum_{l=1}^N m_l \vec{v}_l \vec{v}_l - \text{ки-}$$

нетическая энергия системы

Выразим K через обобщ. координаты
и обобщ. скорости:

$$\vec{r}_l = \vec{r}_l(q_1, \dots, q_S, t)$$

$$\vec{v}_l = \dot{\vec{r}}_l = \sum_{j=1}^S \frac{\partial \vec{r}_l}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial \vec{r}_l}{\partial t} = \vec{v}_l(q_1, q_2, \dots, q_S, t)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial \vec{v}_l}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial \vec{r}_l}{\partial \dot{q}_j}, \quad K = K(q, \dot{q}, t) \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{\partial K}{\partial \dot{q}_j} = \sum_{l=1}^N m_l \vec{v}_l \frac{\partial \vec{v}_l}{\partial \dot{q}_j}.$$

$$\frac{\partial K}{\partial \dot{q}_j} = \sum_{l=1}^N m_l \vec{v}_l \frac{\partial \vec{v}_l}{\partial \dot{q}_j} = \sum_{l=1}^N m_l \vec{v}_l \frac{\partial \vec{r}_l}{\partial \dot{q}_j}.$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial K}{\partial \dot{q}_j} \right) = \underbrace{\sum_{l=1}^N m_l \frac{d\vec{v}_l}{dt} \cdot \frac{\partial \vec{r}_l}{\partial \dot{q}_j}}_{X_j} + \underbrace{\sum_{l=1}^N m_l \vec{v}_l \frac{\partial \vec{v}_l}{\partial \dot{q}_j}}_{\frac{\partial K}{\partial \dot{q}_j}}.$$

$$\Rightarrow \text{получаем, что } \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial K}{\partial \dot{q}_j} \right) = X_j + \frac{\partial K}{\partial \dot{q}_j}.$$

$$X_j = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial K}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial K}{\partial \dot{q}_j}$$

$$X_j = Q_j.$$

$$\boxed{\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial K}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial K}{\partial \dot{q}_j} = Q_j, \quad j=1, \dots, S}$$

↑
уравнение Лагранжа

Опр. обобщенный

$$Q_j = \sum_{l=1}^N \vec{F}_l \frac{\partial \vec{r}_l}{\partial \dot{q}_j}$$

По своему
есть проекция
ось или

§ 21. Функции
Обобщенные

Рассм. сист

$$\vec{F}_l = - \left(\vec{i} \frac{\partial \Pi_l}{\partial x_l} \right)$$

$$Q_j = - \sum_{l=1}^N \left(\frac{\partial \Pi_l}{\partial x_l} \frac{\partial x_l}{\partial \dot{q}_j} \right)$$

$$= - \sum_{l=1}^N \frac{\partial \Pi_l}{\partial \dot{q}_j}$$

Подставим

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial K}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial K}{\partial \dot{q}_j} =$$

Опр. обобщенная сила - величина, определяемая формулой:

$$Q_j = \sum_{l=1}^N \vec{F}_l \frac{\partial \vec{r}_l}{\partial q_j}, \quad j = \overline{1, S}; \quad [Q] = \frac{\text{н.м.}}{|q|}, \quad |q| = \text{н} \Rightarrow |Q| = \text{н}, \quad |q| = 1 \Rightarrow |Q| = \text{н.н.}$$

По своему физическому смыслу обобщ. сила есть проекция сил на какую-либо ось или момент сил относительно какой-то оси.

§ 21. Функция Лагранжа.

Обобщенные импульсы.

Рассм. систему

$$\vec{F}_l = - \left(\vec{i} \frac{\partial \Pi_l}{\partial x_l} + \vec{j} \frac{\partial \Pi_l}{\partial y_l} + \vec{k} \frac{\partial \Pi_l}{\partial z_l} \right)$$

$$Q_j = - \sum_{l=1}^N \left(\frac{\partial \Pi_l}{\partial x_l} \frac{\partial x_l}{\partial q_j} + \frac{\partial \Pi_l}{\partial y_l} \frac{\partial y_l}{\partial q_j} + \frac{\partial \Pi_l}{\partial z_l} \frac{\partial z_l}{\partial q_j} \right) =$$

$$= - \sum_{l=1}^N \frac{\partial \Pi_l}{\partial q_j} = - \frac{\partial}{\partial q_j} \sum_{l=1}^N \Pi_l = \boxed{Q_j = - \frac{\partial \Pi}{\partial q_j}},$$

где $\Pi = \sum_{l=1}^N \Pi_l$ - потенциальная энергия системы.

Подставим в ур-е Лагранжа:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial K}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial K}{\partial q_j} = - \frac{\partial \Pi}{\partial q_j}.$$

м.к. $\frac{\partial \Pi}{\partial \dot{q}_j} = 0$, то $\boxed{\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0}$ — урав-е Лагранжа

где $L = K - \Pi = L(q, \dot{q}, t)$
 $\uparrow$
 функция Лагранжа

Функция Лагранжа — разность кинет. и потен. энергий системы выраженная через обобщ. координаты, обобщ. скорости и время.

Опр. обобщенный импульс — частная производная ф-ции Лагранжа по обобщ. скорости.

$$\boxed{p_j = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}}, j = 1 \dots S,$$

Если $[q] = [m]$, то $[p] = \frac{[m \cdot c]}{[q]} = [mv]$

если $[q] = [1]$, то $[p] = [m v_z]$

По своему физ. смыслу обобщ. импульс — импульс на проекцию на какую-то ось или момент импульса отн-но какой-то оси.

• Закон изменения обобщ. импульса

$$\dot{p}_j = \frac{\partial L}{\partial q_j}$$

Опр. циклизирующие функции

$$\frac{\partial L}{\partial q_j}$$

• Закон сохранения

Обобщ. и циклические

§ 22. Уравнения Канона

Рассмотрим состояние системы зовая на обобщ. и

$\{q, p\}$ — к. и

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) -$$

$$L = K - \Pi$$

$$p_j = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}$$

Опр. **циклические координаты** - координаты, которые явно не входят в функцию Лагранжа, т.е.

$$\frac{\partial L}{\partial q_j} = 0 \Rightarrow p_j = \text{const.}$$

- Закон сохранения обобщенного импульса:

Обобщ. импульс, соответствующий циклич. координате, сохраняется.

§ 2.2. Уравнение Гамильтона.

Канонические переменные.

Рассмотрим систему с s степенями свободы. Будем характеризовать набором обобщ. коорд. и обобщ. импульсов.

$\{q, p\}$ - **канонические переменные**, найдем ур-е движения в них.

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0.$$

$$L = K - \Pi = L(q, \dot{q}, t).$$

$$p_j = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}$$

$$\dot{p}_j = \frac{\partial L}{\partial q_j}$$

Найдем дифференциал:

$$dL = \sum_{j=1}^s \left(\frac{\partial L}{\partial q_j} dq_j + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} d\dot{q}_j \right) + \frac{\partial L}{\partial t} dt$$

$$dL = \sum_{j=1}^s (\dot{p}_j dq_j + p_j d\dot{q}_j) + \frac{\partial L}{\partial t} dt.$$

$$H = \sum_{j=1}^S p_j \dot{q}_j - L \rightarrow dH = \sum_{j=1}^S (p_j dq_j + \dot{q}_j dp_j) - dL$$

$$dH = \sum_{j=1}^S (p_j dq_j + \dot{q}_j dp_j - p_j dq_j - p_j d\dot{q}_j) - \frac{\partial L}{\partial t} dt$$

$$dH = \sum_{j=1}^S (\dot{q}_j dp_j - p_j d\dot{q}_j) - \frac{\partial L}{\partial t} dt$$

$$H = H(q, p, t).$$

$$dH = \sum_{j=1}^S \left(\frac{\partial H}{\partial q_j} dq_j + \frac{\partial H}{\partial p_j} dp_j \right) + \frac{\partial H}{\partial t} dt$$

$$\dot{q}_j = \frac{\partial H}{\partial p_j}, \quad \dot{p}_j = -\frac{\partial H}{\partial q_j} \quad j = 1, \dots, S$$

↑ уравнение Гамильтона
(Гамильтониан)

$$H = \sum_{j=1}^S p_j \dot{q}_j - L = H(q, p, t)$$

$$\frac{dH}{dt} = \sum_{j=1}^S \left(\frac{\partial H}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial H}{\partial p_j} \dot{p}_j \right) + \frac{\partial H}{\partial t}$$

$$\frac{dH}{dt} = \sum_{j=1}^S (-\dot{p}_j \dot{q}_j + \dot{q}_j \dot{p}_j) + \frac{\partial H}{\partial t}$$

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t}$$

Консервативный
гамильтониан

Гамильтониан не меняется

$$H = H(q, p, t)$$

Гамильтониан

$$\vec{p}_j = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j}$$

$$p_j = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j}$$

$$K = \frac{1}{2} \sum_{l=1}^N m_l \dot{q}_l^2$$

меняется

$$K = \frac{1}{2} \sum_{l=1}^S \dot{q}_l^2$$

$$K = \frac{1}{2} \sum_{l=1}^S \dot{q}_l^2$$

$$p_j = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} (K)$$

$$p_j = \frac{\partial K}{\partial \dot{q}_j} = \frac{1}{2} \sum_{l=1}^S \dot{q}_l^2$$

Консервативные системы - у которых гамильтониан не зависит от времени.

Гамильтониан консервативной системы не меняется с течением времени.

$$H = H(q, p) = \text{const.}$$

Гамильтониан ... $H = E = K + \Pi$

$$\vec{r}_l = \vec{r}_l(q_1, \dots, q_s) \rightarrow \vec{v}_l = \dot{\vec{r}}_l = \sum_{j=1}^s \frac{\partial \vec{r}_l}{\partial q_j} \dot{q}_j$$

$$p_j = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial (K - \Pi)}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial K}{\partial \dot{q}_j}$$

$$K = \frac{1}{2} \sum_{l=1}^N m_l \vec{v}_l \vec{v}_l = \frac{1}{2} \sum_{l=1}^N m_l \sum_{\alpha=1}^s \frac{\partial \vec{r}_l}{\partial q_\alpha} \dot{q}_\alpha \sum_{\beta=1}^s \frac{\partial \vec{r}_l}{\partial q_\beta} \dot{q}_\beta$$

учитывать

меняем порядок суммирования:

$$K = \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^s \sum_{\beta=1}^s \dot{q}_\alpha \dot{q}_\beta \underbrace{\sum_{l=1}^N m_l \frac{\partial \vec{r}_l}{\partial q_\alpha} \cdot \frac{\partial \vec{r}_l}{\partial q_\beta}}_{K_{\alpha\beta}(q) = K_{\beta\alpha}(q)}$$

$$K = \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^s \sum_{\beta=1}^s K_{\alpha\beta}(q) \dot{q}_\alpha \dot{q}_\beta$$

$$p_j = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial (K - \Pi)}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial K}{\partial \dot{q}_j} \quad - \text{обобщенный импульс}$$

$$p_j = \frac{\partial K}{\partial \dot{q}_j} = \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^s \sum_{\beta=1}^s K_{\alpha\beta} (\dot{q}_\alpha \delta_{j\beta} + \dot{q}_\beta \delta_{j\alpha})$$

$$\delta_{\alpha\beta} = \begin{cases} 1, & \alpha = \beta \\ 0, & \alpha \neq \beta \end{cases} \text{ — символ Кронекера}$$

$$p_j = \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^S \dot{q}_\alpha \sum_{\beta=1}^S K_{\alpha\beta} \delta_{j\beta} + \frac{1}{2} \sum_{\beta=1}^S \dot{q}_\beta \sum_{\alpha=1}^S K_{\alpha\beta} \delta_{\alpha j} =$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{\beta=1}^S \dot{q}_\beta K_{j\beta} + \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^S \dot{q}_\alpha \underbrace{K_{\alpha j}}_{K_{j\alpha}} = \sum_{\alpha=1}^S K_{j\alpha} \dot{q}_\alpha$$

$$\Rightarrow \boxed{p_j = \sum_{\alpha=1}^S K_{j\alpha} \dot{q}_\alpha}, \quad j = 1, \dots, S.$$

$$H = \sum_{j=1}^S p_j \cdot \dot{q}_j - L = \sum_{j=1}^S \dot{q}_j \cdot \sum_{\alpha=1}^S K_{j\alpha} \dot{q}_\alpha - L = \underbrace{\sum_{j=1}^S \sum_{\alpha=1}^S K_{j\alpha} \dot{q}_j \dot{q}_\alpha}_{2K} - L$$

функция Лагранжа

Гамильтониан

$$\Rightarrow H = 2K - (K - \Pi) = K + \Pi.$$

$$H = K + \Pi = H(q, p)$$

Гамильтониан консервативной системы равен сумме кинетической и потенциальной энергии системы, выраженная через набор обобщённых координат и обобщённых импульсов системы.

§23. Равновесие системы и его устойчивость.

Равновесие — это состояние, в котором система, предоставленная самой себе, может находиться сколь угодно долго.

Условия равновесия:

$$m_l \ddot{\vec{r}}_l = \vec{F}_l + \vec{R}_l \quad (l = 1, \dots, N).$$

" $\vec{a}_l$ заданное смещение сила реакции

$$\ddot{\vec{r}}_l = 0 \Rightarrow \boxed{\vec{F}_l + \vec{R}_l = 0} \quad l = 1, \dots, N \quad (1)$$

В положении равновесия материальной точки (рок-во от неё)

исключим силы для этого Δ (вирт. работа)

$$\sum_{l=1}^N \vec{R}_l \delta \vec{r}_l = 0$$

$$(2) \quad \boxed{\sum_{l=1}^N \vec{F}_l \delta \vec{r}_l = 0}$$

принцип виртуальных работ

В положении равновесия сил должна быть равна нулю.

Переходим к обобщённым координатам

$$\vec{r}_l = \vec{r}_l(q_1, q_2, \dots, q_N)$$

$$\delta \vec{r}_l = \sum_{j=1}^N \frac{\partial \vec{r}_l}{\partial q_j} \delta q_j$$

$$\sum_{l=1}^N \vec{F}_l \cdot \sum_{j=1}^N \frac{\partial \vec{r}_l}{\partial q_j} \delta q_j$$

Меняем порядок суммирования

$$\sum_{j=1}^N \delta q_j \underbrace{\sum_{l=1}^N \vec{F}_l \frac{\partial \vec{r}_l}{\partial q_j}}_{Q_j}$$

$$\sum_{j=1}^N Q_j \delta q_j = 0$$

Откуда следует, что

$$(3) \quad \boxed{Q_j = 0} \quad j = 1, \dots, N$$

3. Положение равновесие суммы сил, действующих на материальную точку, должна быть равна 0 (рек-во от противного).

Исклоним силы реакции:

для этой Δ сис-мы с идеальными связями (вирт. работа сил реакции = 0):

$$\sum_{i=1}^N \vec{R}_i \delta \vec{r}_i = 0.$$

(2) $\boxed{\sum_{i=1}^N \vec{F}_i \delta \vec{r}_i = 0}$ (это мож. скалярно умножить равенство $\vec{F}_i + \vec{R}_i = 0$ на $\delta \vec{r}_i$).

↑ принцип виртуальных перемещений.

В положении равновесия вирт. работа главных сил должна быть равна 0.

Перейдем к обобщенным координатам:

$$\vec{r}_i = \vec{r}_i(q_1, q_2, \dots, q_s)$$

$$\delta \vec{r}_i = \sum_{j=1}^s \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j$$

$$\sum_{i=1}^N \vec{F}_i \sum_{j=1}^s \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j = 0.$$

Меняем порядок суммирования:

$$\sum_{j=1}^s \delta q_j \underbrace{\sum_{i=1}^N \vec{F}_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}}_{Q_j} = 0$$

$$\sum_{j=1}^s Q_j \delta q_j = 0$$

Отсюда следует, что $Q_j = 0 \quad \forall j = 1, s$.

(3) $\boxed{Q_j = 0}$ — В положении равновесия все обобщенные силы должны быть равны 0.

Допустим, что заданное поле потенциальное:

$$Q_j = - \frac{\partial \Pi}{\partial q_j}$$

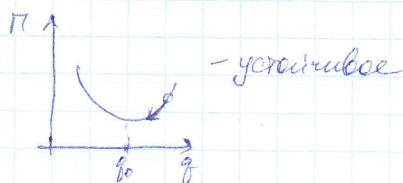
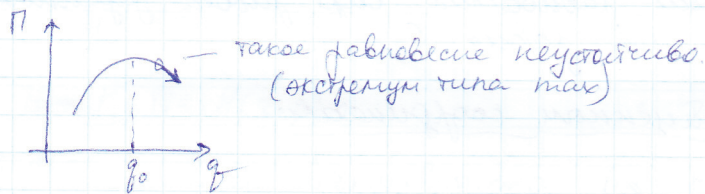
$$(4) \quad \frac{\partial \Pi}{\partial q_j} = 0 \quad j = 1, 2, \dots$$

В положении равновесия потенциальная энергия имеет экстремум по всем обобщенным координатам.

Равновесие устойчиво, если система, введенная из этого состояния и предоставленная самой себе, начинает двигаться в сторону положения равновесия.

Пример: математический маятник.

В противном случае равновесие неустойчиво.



Равновесие устойчиво, если потенциальная энергия имеет в точке равновесия min, и неустойчиво, если max.

§24. Колебания

Колебания — колебательное движение.

Пример: маятник.

Уравнение гармонических колебаний

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0$$

x — обобщенная координата

ω — частота колебаний

Общее решение

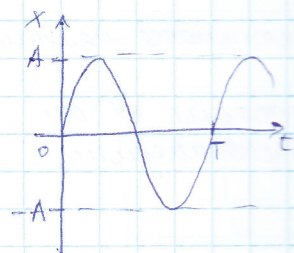
$$x(t) = A \cdot \cos(\omega t + \varphi)$$

t — время [с]

A — амплитуда

φ — начальная фаза

$$\varphi = \omega t + \varphi -$$



Начальные условия

$$x(t) = A \cdot \cos(\omega t + \varphi)$$

$$\dot{x}(t) = -A\omega \cdot \sin(\omega t + \varphi)$$

§24. Колебания в сис-мах с одной степенью свободы.

Колебания — повторяющиеся движения в окрестности некоторого устойчивого равновесия сис-мы

Пример: маятник

Уравнение гармонических колебаний:

$$\ddot{x} + \omega^2 \cdot x = 0$$

x — обобщенная координата, которая отсчитывается от положения устойчивого равновесия сис-мы.

ω — частота колебаний $[\text{с}^{-1}]$

Общее решение этого уравнения:

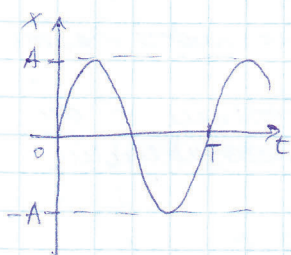
$$x(t) = A \cdot \cos(\omega t + \varphi),$$

t — время $[\text{с}]$;

A — амплитуда

φ — начальная фаза колебаний

$\varphi = \omega t + \varphi$ — фаза колебаний



T — период колебаний — длительность одного колебания

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

Начальные условия — $x(t=0) = x_0$; $\dot{x}(t=0) = \dot{x}_0$.

$$x(t) = A \cdot \cos(\omega t + \varphi)$$

$$\dot{x}(t) = -A\omega \cdot \sin(\omega t + \varphi)$$

$$\begin{cases} x_0 = A \cdot \cos \varphi \\ \dot{x}_0 = -A\omega \sin \varphi \end{cases}$$

$$\| A = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{\dot{x}_0}{\omega}\right)^2}, \quad \cos \varphi = \frac{x_0}{A}, \quad \sin \varphi = -\frac{\dot{x}_0}{A\omega}$$

Метод определения частот.

- 1) написать уравнение движения
- 2) привести это уравнение к стандартному виду $\ddot{x} + \omega^2 x = 0$

Примеры:

1) Физический маятник.



ось вращения

$$S = l$$

$$q = \varphi$$

$$\dot{q} = \dot{\varphi} = \omega$$

$$K = \frac{J\omega^2}{2} = \frac{J\dot{\varphi}^2}{2}$$

$$\Pi = -mgl \cdot \cos \varphi$$

$$L = K - \Pi = \frac{J\dot{\varphi}^2}{2} + mgl \cdot \cos \varphi$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0$$

$$J\ddot{\varphi} + mgl \sin \varphi = 0$$

Δ малые колебания: $\varphi \ll 1$, тогда $\sin \varphi = \varphi$.

$$\Rightarrow \ddot{\varphi} + \omega^2 \varphi = 0, \quad \omega = \sqrt{\frac{mgl}{J}}, \quad m - \text{полная масса маятника,}$$

g - ускорение свободного падения, l - расстояние от оси вращения до центра масс, J - момент инерции маятника.

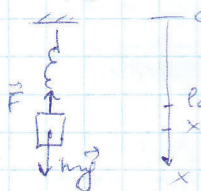


$$\omega = \sqrt{\frac{m g R}{2 m R^2}} = \sqrt{\frac{g}{2R}} \Rightarrow T = 2\pi \sqrt{\frac{2R}{g}}$$

2) Математический



3) Грузинный



$$m\ddot{y} + ky = 0$$

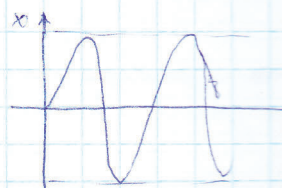
$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$T =$$

§25. Физический

1) Гармонический

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0$$



2) Затухающий

$$\ddot{x} + \alpha \dot{x} + \omega^2 x = 0$$

② Математический маятник.

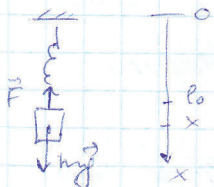


$$\omega = \sqrt{\frac{mg}{l}}, \quad \gamma = m\omega^2$$

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$$

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \quad - \text{формула Тейлора.}$$

③ Грузинный осциллятор.



$$m\ddot{x} = mg - k(x - l_0)$$

$$m\ddot{x} + k(x - l_0 - \frac{mg}{k}) = 0$$

$$\ddot{x} = \ddot{y}$$

$$m\ddot{y} + ky = 0$$

$$\ddot{y} + \omega^2 y = 0$$

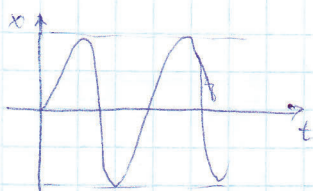
$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}$$

§25. Ринтеские эффекты в колебательных сис-мах

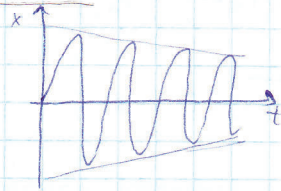
① Гармонические колебания.

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0$$



② Затухающие колебания.

$$\ddot{x} + \alpha \dot{x} + \omega^2 x = 0$$



Воодатность - число колебаний, которые успеют пройти до того, как амплитуда уменьшится в 2 раза. Q.

③ Нелинейные колебания

$$\ddot{x} + f(x) = 0,$$

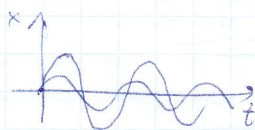
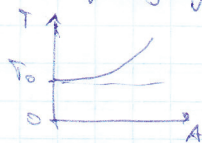
$f(x)$ - нелинейная ф-ция.

Например, для маятника:

$$\ddot{x} + \omega^2 \sin x = 0, \quad \omega = \sqrt{\frac{g}{l}}.$$

это уравнение не решается в элементарных функциях.

Численное решение позволяет установить что период колебаний будет зависеть от их амплитуды. (период растет с ростом амплитуды).



④ Вынужденные колебания - колебания, происходящие под действием периодически меняющейся внешней силы.

$$\ddot{x} + \alpha \dot{x} + \omega_0^2 x = f(t)$$

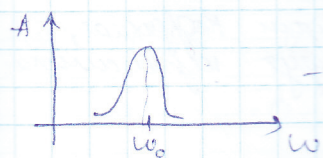
$$f(t) = f_0 \cdot \cos \omega t$$

$$\cos \omega t = \frac{1}{2} e^{i\omega t} + \text{к.с.}$$

$$x = \frac{1}{2} A e^{i\omega t} + \text{к.с.}$$

$$A(-\omega^2 + \alpha i \omega + \omega_0^2) = f_0$$

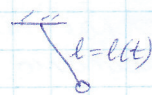
$$A = \frac{f_0}{\omega_0^2 - \omega^2 + i\alpha\omega}$$



Резонанс - явление совпадения частоты колебаний

⑤ Стабилизированные

$$\ddot{x} + \omega^2(t)x = 0$$



⑥ Ансамбль ос

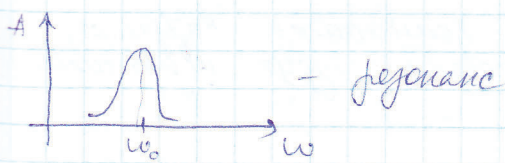
§ 26. Нормаль

Δ колебательную систему



$$\begin{cases} m\ddot{x}_1 = -kx_1 + k(x_2 - x_1) \\ m\ddot{x}_2 = -k(x_2 - x_1) \end{cases}$$

Уравнения колебаний



Резонанс - возрастание амплитуды колебаний при совпадении частоты внешней силы с собственной частотой колебаний системы.

⑤ Параметрические колебания.

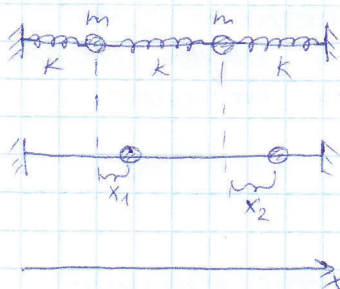
$$\ddot{x} + \omega^2(t)x = 0$$

$l = l(t)$ $\exists$ параметрический резонанс.

⑥ Ансамбль осцилляторов.

§ 26. Нормальные колебания и нормальные координаты

Δ колебательную систему с несколькими степенями свободы



$$\begin{cases} m\ddot{x}_1 = -kx_1 + k(x_2 - x_1) \\ m\ddot{x}_2 = -k(x_2 - x_1) - kx_2 \end{cases} \quad \text{— II закон Ньютона (+ закон Гука)}$$

Уравнения колебаний оказались связанными

Однако $\exists$ такие линейные комбинации координат, для которых уравнения колебаний будут независимыми.

$$\oplus \quad m(\ddot{x}_1 + \ddot{x}_2) = -k(x_1 + x_2)$$

$$\ominus \quad m(\ddot{x}_2 - \ddot{x}_1) = -3k(x_2 - x_1)$$

Введём новые координаты $\theta_1 = x_1 + x_2$, $\theta_2 = x_2 - x_1$

$$\begin{cases} \ddot{\theta}_1 + \omega_1^2 \theta_1 = 0, & \omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m}} \\ \ddot{\theta}_2 + \omega_2^2 \theta_2 = 0, & \omega_2 = \sqrt{\frac{3k}{m}} \end{cases}$$

Нормальные координаты — координаты, которые при любых значениях системы являются независимой группой.

$$\theta_1(t) = A_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1)$$

$$\theta_2(t) = A_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_2)$$

Собственные частоты колебаний — частоты колебаний нормальных координат.

Здесь это ω_1 и ω_2 .

Из независимости нормальных координат $\Rightarrow$, что возможны значения системы, при которых отклоняется от нуля только одна нормальная координата, а все остальные равны нулю.

$$x_1 = \frac{1}{2}(\theta_1 - \theta_2), \quad x_2 = \frac{1}{2}(\theta_1 + \theta_2)$$

Нормальные колебания — гармонические колебания на одной из собственных частот системы.

$$\textcircled{\omega_1} \quad \theta_2 = 0 \Rightarrow \theta_2(t=0) = \dot{\theta}_2(t=0) = 0$$

$$\theta_2(t=0) = x_2(t=0) - x_1(t=0) = 0 \Rightarrow x_{10} = x_{20}, \quad \dot{x}_{10} = \dot{x}_{20} (=0)$$



$$\textcircled{\omega_2} \quad \theta_1 = 0 \Rightarrow \dot{\theta}_1(t=0) = 0$$

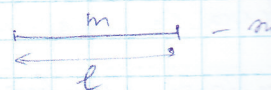
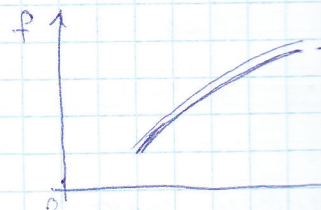
$$x_{10} + x_{20} = 0$$

$$x_{10} = -x_{20}$$



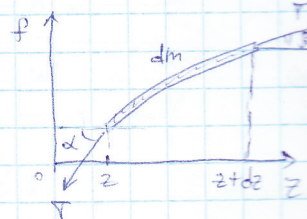
§ 27. Механика

Волна — колебание среды.



$$\rho = \frac{m}{l} \quad \left[\frac{\text{кг}}{\text{м}} \right]$$

T — сила натяжения



$$dm \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = T \cdot \sin \beta$$

$\alpha, \beta \ll 1$, тогда $\sin \beta \approx \beta$

$$\textcircled{2} \quad \theta_1 = 0 \quad \dot{\theta}_{10} = \dot{\theta}_{20} = a \quad \theta_{10} = \theta_{20} = 0$$

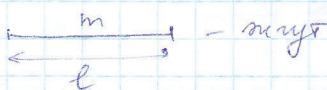
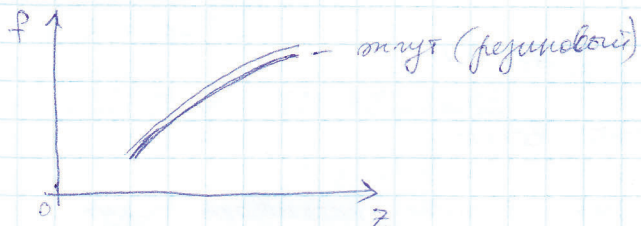
$$x_{10} + x_{20} = 0, \quad \dot{x}_{10} + \dot{x}_{20} = 0$$

$$x_{10} = -x_{20}, \quad \dot{x}_{10} = -\dot{x}_{20} = 0$$



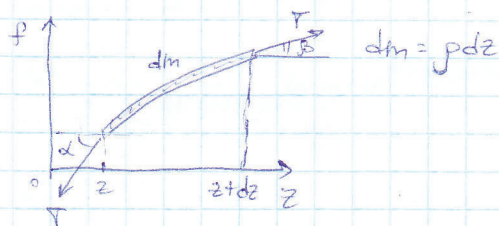
§ 27. Механика волновых процессов.

Волна — колебание, распространяющееся в сплошной среде.



$$\rho = \frac{m}{l} \quad \left[\frac{\text{кг}}{\text{м}} \right] - \text{линейная плотность}$$

T — сила натяжения $[H]$



$$dm \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = T \cdot \sin \beta - T \cdot \sin \alpha$$

$\alpha, \beta \ll 1$, тогда $\sin$ можно заменить $\sin$ на $\sin$ или $\cos$ на $\cos$.

$$\text{div } \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = \nabla \cdot (\rho \beta - \rho \alpha) = \nabla \cdot \left(\frac{\partial f}{\partial z} \Big|_{z+dz} - \frac{\partial f}{\partial z} \Big|_z \right) =$$

$$= \nabla \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \cdot dz = \rho dz \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = \frac{\tau}{\rho} \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

$$\left[\frac{\tau}{\rho} \right] = \frac{M^2}{c^2} = \boxed{v^2 = \frac{\tau}{\rho}}$$

$$\boxed{\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}} \quad - \text{ волновое уравнение.}$$

Решение: $f(z, t) = F_1(z - vt) + F_2(z + vt)$

Пусть $z - vt = \text{const} \Rightarrow dz - v dt = 0$

$$\Rightarrow \boxed{v = \frac{dz}{dt}} \quad - \text{ скорость волны.}$$

$v = \sqrt{\frac{\tau}{\rho}}$, т.е. чем сильнее натягиваем нить, тем быстрее идёт волна.

Стационарная волна. — волна, которая описывается произведением ф-ции времени на ф-цию координат.

$$f(z, t) = Z(z) \cdot \Theta(t)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

$$Z \cdot \ddot{\Theta} = v^2 \cdot \Theta \cdot Z''$$

Разделим переменные:

$$\underbrace{\frac{\ddot{\Theta}}{\Theta}}_{\text{не зависит от } z} = v^2 \underbrace{\frac{Z''}{Z}}_{\text{не зависит от } t} = \text{const} \equiv -\omega^2$$

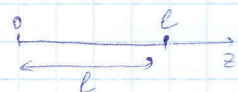
не зависит от z — не зависит от t — не зависит

$$\ddot{\Theta} + \omega^2 \Theta = 0$$

$$Z'' + k^2 Z = 0$$

$$\Theta(t) = A \cdot \cos(\omega t + \varphi)$$

$$Z(z) = B \cdot \cos(kz + \dots)$$



Граничные условия

$$Z(0) = Z(l) = 0$$

$$Z(z) = \sin kz$$

$$\sin kl = 0 \Rightarrow kl = n\pi$$

$$\omega = kv \Rightarrow \omega_n = v k_n$$

$$n=1$$

$$\boxed{\omega_1 = \frac{\pi}{l} \cdot v = \frac{\pi}{l} \cdot \sqrt{\frac{\tau}{\rho}}}$$

$$n=2$$

$$\boxed{\omega_2 = 2\omega_1}$$

§ 28. Случайное

Δ — число, все

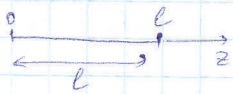
Случайное событие
предсказать
нельзя

$$\ddot{\Theta} + \omega^2 \Theta = 0$$

$$Z'' + k^2 Z = 0, \quad k = \frac{\omega}{v}$$

$$\Theta(t) = A \cdot \cos(\omega t + \varphi)$$

$$Z(z) = B \cdot \cos(kz + \varphi)$$



Граничные условия:

$$Z(0) = Z(l) = 0$$

$$Z(z) = \sin kz$$

$$\sin kl = 0 \Rightarrow kl = h\pi, \quad h = 1, 2, \dots$$

$$\downarrow k_h = \frac{\pi}{l} \cdot h$$

$$\omega = kv \Rightarrow \omega_h = \frac{\pi}{l} \cdot v \cdot h$$

$$h=1$$



$$\omega_1 = \frac{\pi}{l} \cdot v = \frac{\pi}{l} \cdot \sqrt{\frac{T}{\rho}} - \text{основной тон}$$

$$h=2$$



$$\omega_2 = 2\omega_1 - \text{овертон}$$

§ 28. Случайные величины и вероятности.

Δ событие, состоящее из большого числа частиц.

Случайное событие — событие, исход которого нельзя предсказать заранее, но наблюдение которого можно многократно повторить.

Вероятность случайного события — отношение числа наступлений события в серии испытаний к общему числу испытаний в пределе, когда число испытаний $\rightarrow \infty$.

$$P(A) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{N_A}{N}$$

$$\Rightarrow 0 \leq P \leq 1$$

невозможное событие

достоверное событие

1) Аксиома сложения вероятностей:

Вероятность наступления одного из взаимно исключают. лых событий = сумме их вероятностей.

$$P(A+B) = P(A) + P(B)$$

2) Аксиома умножения вероятностей:

Вероятность наступления независимых случайных событий = произведению их вероятностей.

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B)$$

Случайная величина — величина, значение которой нельзя предсказать заранее, но значение которой можно многократно повторить.

Распределение плотности вероятности — отношение вероятности попадания случайной величины в малый интервал вокруг заданного значения к величине интервала в пределе, когда интервал $\rightarrow 0$.

$$w(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{P(x_0 \leq x \leq x_0 + \Delta x)}{\Delta x}$$

Св-ва: 1) $w \geq 0$

$$[w] = \frac{1}{[x]}$$

2) условие нормировки: $\int w(x) dx = 1$.

3) Математическое ожидание

$$\langle f(x) \rangle = \int f(x) w(x)$$

среднее

Применение:

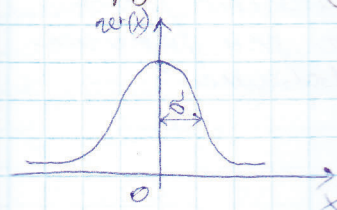
1) среднее значение

$$\bar{x} = \int x w(x)$$

2) дисперсия величины σ^2

$$\sigma^2 = \overline{(x - \bar{x})^2}$$

Распределение Гаусса



Многомерная плотность вероятности величин в малых интервалах

$$w(x_0, y_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0, \Delta y \rightarrow 0} \frac{P(x_0 \leq x \leq x_0 + \Delta x, y_0 \leq y \leq y_0 + \Delta y)}{\Delta x \Delta y}$$

Св-ва:

1) $w \geq 0$ $[w] = \frac{1}{[x][y]}$

2) условие нормировки: $\int \int w(x, y) dx dy = 1$

3) Среднее возмущение средних.

$$\langle f(x) \rangle = \int f(x) w(x) dx$$

среднее

Применение:

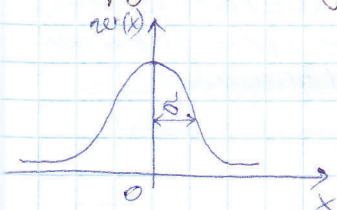
1) Среднее значение (математическое ожидание).

$$\bar{x} = \int x w(x) dx$$

2) дисперсия - средний квадрат отклонения случайной величины от её среднего значения

$$\sigma'^2 = \overline{(x - \bar{x})^2} \quad (\sigma'^2 = \bar{x}^2 - \bar{x}^2)$$

Распределение Гаусса: $w(x) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} \quad (-\infty \leq x \leq \infty)$



Многомерная плотность вероятности - отношение вероятности попадания нескольких случайных величин в малые интервалы величин заданных значений в пределе к произведению величин интервалов в пределе, когда интервалы $\rightarrow 0$.

$$w(x_0, y_0) = \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \frac{P(x_0 \leq x \leq x_0 + \Delta x, y_0 \leq y \leq y_0 + \Delta y)}{\Delta x \cdot \Delta y}$$

Св-ва:

1) $w \geq 0$ $[w] = \frac{1}{[x]} \cdot \frac{1}{[y]}$

2) условие нормировки: $\iint w(x, y) dx dy = 1$

3) Правило возмущения средних.

$$\langle f(x, y) \rangle = \iint f(x, y) w(x, y) dx dy$$

4) Функция порядка

$$w_1(x) = \int w(x, y) dy$$

$$w_2(y) = \int w(x, y) dx$$

5) независимое случайное величин.
 $w(x, y) = w_1(x) \cdot w_2(y)$

§29. Распределение Гиббса.

Основной закон статистической механики равновесных систем: в состоянии термодинамического равновесия распределение плотности вероятности для различных состояний системы определяется формулой:

$$w(z) = C \cdot e^{-H(z)/kT}$$

z - совокупность обобщенных координат и обобщенных импульсов системы.
 $z = q, p$

H - гамильтониан

$$H = K + \Pi$$

K - кинетическая энергия системы,

Π - потенциальная

T - абсолютная температура системы

k - постоянная Больцмана
 $k = 1,38 \cdot 10^{-23} \frac{\text{Дж}}{\text{градус}}$

C - нормировочная постоянная.

Термодинамическое состояние системы характеризуется

$\Gamma_1 | \Gamma_2 \rightarrow$
 неравновесное состояние

Температура —

когда поршень — разделим на
 когда поршень в под

Граус Цельсия —
 температурой кипения воды
 это единица измерения

$t [^{\circ}\text{C}]$

$$T = t + 273$$

$$t = 20^{\circ}\text{C} \Rightarrow T =$$

Свойства распределения

1) распределение

$$w(v_x, v_y, v_z) = C \cdot$$

m - масса молекулы

$-\infty < v_x, v_y, v_z < \infty$
 случайными величинами

Дисперсия температур

$$\overline{v_x^2} = ?$$

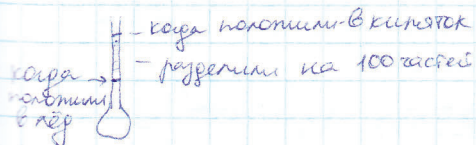
$$w(v_x) = C e^{-\frac{mv_x^2}{2kT}}$$

Термодинамическое равновесие — состояние, в котором сис-ма, предоставленная самой себе, может находиться сколь угодно долго.

$$\boxed{T_1 | T_2} \rightarrow \boxed{T | T}$$

неравновесное состояние равновесное состояние

Температура — то, что измеряет термометр.



Градус Цельсия — одна сотая часть интервала между температурой таяния льда и температурой кипения воды при нормальном давлении.

Это единица измерения температуры в системе СИ.

$$t [^{\circ}\text{C}]$$

$$\boxed{T = t + 273}$$

$$t = 20^{\circ}\text{C} \Rightarrow T = 20 + 273 = 293 \text{ K}$$

Кельвин.

Свойства распределения Гиббса:

1) распределение молекул по скоростям

$$w(v_x, v_y, v_z) = C \cdot e^{-\frac{m(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)}{2kT}} \quad \text{— распределение Максвелла}$$

m — масса молекулы

$-\infty < v_x, v_y, v_z < \infty$ v_x, v_y, v_z не зависят друг от друга $\Rightarrow$ являются случайными величинами с распределением Гаусса.

Дисперсия тепловой скорости

$$\overline{v_x^2} = ?$$

$$w(v_x) = C e^{-\frac{mv_x^2}{2kT}}$$

$$-\infty < v_x < \infty$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \omega(v_x) dv_x = 1$$

$$\overline{v_x^2} = \int_{-\infty}^{+\infty} v_x^2 \omega(v_x) dv_x$$

Возьмем интеграл интегрированием по частям.

$$\frac{d}{dv_x} \omega(v_x) = \omega(v_x) \left(-\frac{m}{2kT} \right) 2v_x = -\frac{m}{kT} v_x \omega(v_x)$$

$$v_x \cdot \omega(v_x) = -\frac{kT}{m} \cdot \frac{d}{dv_x} \omega(v_x)$$

$$\Rightarrow \overline{v_x^2} = -\frac{kT}{m} \int_{-\infty}^{+\infty} v_x d\omega(v_x) = -\frac{kT}{m} \left[v_x \cdot \omega(v_x) \right]_{v_x=-\infty}^{v_x=+\infty} -$$

$$\underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} \omega(v_x) dv_x}_{=1} = \frac{kT}{m}$$

$$\boxed{\overline{v_x^2} = \frac{kT}{m}}$$

Средняя кинетическая энергия молекул.

$$\left\langle \frac{mv^2}{2} \right\rangle = \frac{m}{2} (v_x^2 + v_y^2 + v_z^2) = \frac{3}{2} m \cdot \overline{v_x^2} = \frac{3}{2} kT$$

т.к. все оси
равноправны

$$\boxed{\left\langle \frac{mv^2}{2} \right\rangle = \frac{3}{2} kT}$$

$\Rightarrow$ абсолютная температура характеризует среднюю кинетическую энергию молекул.

2) распределение частиц в потенциальном силовом поле.

$$\omega(z) = C \cdot e^{-\frac{\Pi(z)}{kT}} - \text{распределение Больцмана}$$

Π - потенциальная энергия.

Пример (в поле тяжести)

$$\Pi(z) = m g z$$

$$\omega(z) = C \cdot e^{-\frac{m g z}{kT}}$$

Возьмем среднюю высоту.

$$\bar{z} = ?$$

$$\bar{z} = \int_0^{\infty} z \omega(z) dz$$

$$\omega(z) = C \cdot e^{-\frac{z}{z_0}}$$

$$\frac{d\omega(z)}{dz} = \omega(z) \cdot \left(-\frac{1}{z_0} \right)$$

$$\omega(z) = -z_0 \frac{d\omega(z)}{dz}$$

$$\bar{z} = +z_0 \int_0^{\infty} z d\omega(z)$$

$$\boxed{\bar{z} = z_0 = \frac{kT}{mg}}$$

Броуновские частицы
участвовать в тепловом движении

§30. Размер и масса молекул

Оценим параметры

Уравнение состояния

$$\boxed{N, V, T}$$

соединяет

N - число

V - объем

T - температура

Пример. (в поле силы тяжести)

$$\Pi(z) = m_p z$$

↑ высота

$$w(z) = C \cdot e^{-\frac{m_p z}{kT}}$$

Вычислим среднюю высоту частицы в поле силы тяжести.

$$\bar{z} = ?$$

$$\bar{z} = \int_0^{\infty} z w(z) dz$$

$$w(z) = C \cdot e^{-\frac{z}{z_0}}, \text{ где } z_0 = \frac{kT}{m_p}$$

$$\frac{dw(z)}{dz} = w(z) \cdot \left(-\frac{1}{z_0}\right)$$

$$w(z) = -z_0 \frac{dw(z)}{dz}$$

$$\bar{z} = -z_0 \int_0^{\infty} z dw(z) = -z_0 \left[z \cdot w(z) \Big|_{z=0}^{z=\infty} - \int_0^{\infty} w(z) dz \right]$$

1
1

$$\boxed{\bar{z} = z_0 = \frac{kT}{m_p}}$$

Броуновские частицы — частицы вещества, способные участвовать в тепловом движении.

§30. Размер и масса молекул.

Оценим параметры молекул воздуха.

Уравнение состояния идеального газа.

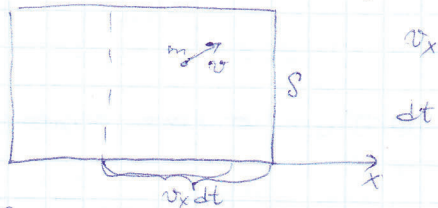
сосуд $\boxed{N, V, T}$

N — число молекул
 V — объем сосуда
 T — температура (абсолютная) в сосуда

p — ?
давление

$$\boxed{p = \frac{F}{S}} \quad \left[\frac{H}{M^2} = Pa \right] - \text{закон}$$

Концентрация молекул $n = \frac{N}{V} \quad [M^{-3}]$



Возьмем элементарное давление, которое создают молекулы, имеющие скорость v_x ?

Элементарное давление $dp = \frac{1}{S} \underbrace{2mn v_x}_{\text{изменение импульса молекул при столкновении со стенкой}} \cdot \underbrace{S \cdot v_x dt \cdot n \cdot w(v_x) dv_x}_{\text{число молекул с данной скоростью в элементарном объеме}} \cdot dt$

$$dp = 2mn v_x^2 w(v_x) dv_x$$

Полное давление

$$p = \int dp = 2mn \int_0^\infty v_x^2 w(v_x) dv_x$$

$$p = mn \int_{-\infty}^\infty v_x^2 w(v_x) dv_x$$

$$\frac{1}{2} \overline{v_x^2} = \frac{kT}{m}$$

$$p = m \cdot n \cdot \frac{kT}{m} = nkT$$

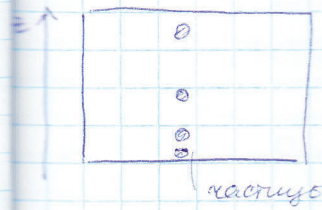
$$\boxed{p = nkT} - \text{уравнение состояния идеального газа}$$

$$\Rightarrow n = \frac{p}{kT}$$

Измерение постоянной Больцмана

Опыт Стефена (1908 г.). Стефен наблюдал с помощью микроскопа движение броуновских

частиц и сумел измерить постоянную Больцмана



$$\bar{z} = \frac{kT}{mg - F_A} - \text{сумма}$$

$$F_A = \rho_0 V g$$

$$m = \rho V, \quad V =$$

$$\bar{z} = \frac{6kT}{(\rho - \rho_0) \pi d^3 g}$$

$$k = \bar{z} \frac{(\rho - \rho_0) \pi d^3 g}{6T}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho = 1,2 \cdot 10^3 \frac{kg}{m^3} \\ \rho_0 = 10^3 \frac{kg}{m^3} \\ \rho = 10 \frac{M}{C^2} \\ T = 300 K \end{array} \right.$$

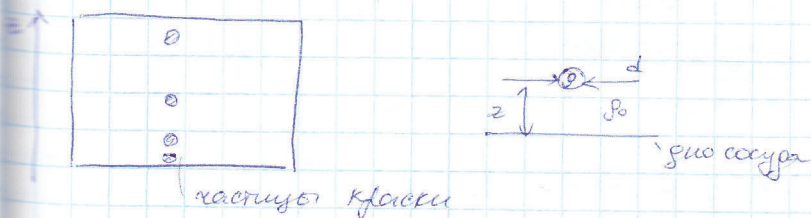
$$d = 0,4 \cdot 10^{-6} m$$

"min glass"

опыт $\Rightarrow \bar{z} = 6 \cdot 10^5$

$$k = 1,38 \cdot 10^{-23} \frac{Jm}{K}$$

частицу и суммировать среднюю высоту, из которой происходит тепловое движение.



$$\bar{z} = \frac{kT}{m\rho - F_A} \text{ — сила Архимеда}$$

$$F_A = \rho_0 V \rho$$

$$m = \rho V, \quad V = \frac{4}{3} \pi R^3 = \frac{\pi d^3}{6} \text{ — диаметр}$$

$$\bar{z} = \frac{6kT}{(\rho - \rho_0) \pi d^3 \rho}$$

$$K = \bar{z} \frac{(\rho - \rho_0) \pi d^3 \rho}{6T}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho = 1,2 \cdot 10^3 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3} \text{ — плотность акварельной краски} \\ \rho_0 = 10^3 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3} \\ \rho = 10 \frac{\text{м}}{\text{с}^2} \\ T = 300 \text{ К} \end{array} \right.$$

$$d = 0,4 \cdot 10^{-6} \text{ м}$$

"минимальная длина волны света, которой способен ещё видеть человек (физический)".

опыт $\Rightarrow \bar{z} = 6 \cdot 10^5 \text{ м}$

$$K = 1,38 \cdot 10^{-23} \frac{\text{Дж}}{\text{град.}}$$

Концентрация молекул газа при нормальных условиях

$$n = \frac{p}{kT}, \quad \begin{cases} p = p_0 = 10^5 \text{ Па} \\ T = T_0 = 273 \text{ К} \end{cases} \quad \text{— нормальные условия (н.у.)}$$

$$n = n_0 = \frac{10^5 \text{ Па}}{1,38 \cdot 10^{-23} \cdot 273 \text{ К}}$$

$$n_0 = 2,7 \cdot 10^{25} \text{ м}^{-3} \quad \text{— число Лошмидта.}$$

Масса молекулы.

Плотность воздуха при н.у.:

$$\rho_0 = \frac{m}{V} = \frac{m_0 N}{V} = m_0 \cdot n_0$$

$$m_0 = \frac{\rho_0}{n_0}$$

$$\rho_0 = 1,3 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$$

$$\Rightarrow m_0 = \frac{1,3 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}}{2,7 \cdot 10^{25} \text{ м}^{-3}} \approx 0,5 \cdot 10^{-25} \text{ кг}$$

$$m_0 = 0,5 \cdot 10^{-25} \text{ кг}$$

Радиус молекулы воздуха.

Средняя плотность молекулы $\approx$ плотности жидкости.

$$\rho = \frac{m_0}{d^3} \approx \rho_{\text{жидкости}} = 10^3 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$$

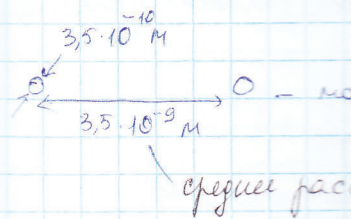
например, рассмотрим воду

$$d = \sqrt[3]{\frac{m_0}{\rho}} = \sqrt[3]{\frac{0,5 \cdot 10^{-25} \text{ кг}}{10^3 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}}}$$

$$d \approx 3,5 \cdot 10^{-10} \text{ м}$$

Скорость молекул.

$$v = \sqrt{\overline{v_x^2}} = \sqrt{\frac{kT}{m}}$$



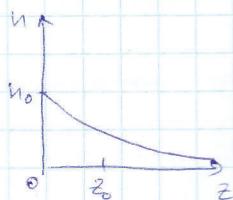
Факты, подтверждающие

1) длина пути

$$p = nkT \rightarrow$$

2) распределение

$$n(z) = n_0 e^{-\frac{mgz}{kT}}$$



§ 31. Распределение

Теорема. В состоянии равновесия на единицу квадрата в среднем приходится

$$K = 1,38 \cdot 10^{-23} \frac{\text{Дж}}{\text{град}} -$$

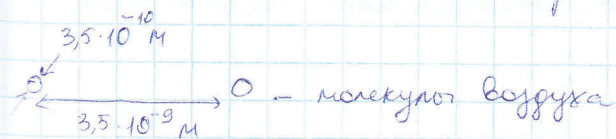
T — абсолютная температура

Теорема о равновесии

Скорость молекул.

$$v = \sqrt{\overline{v_x^2}} = \sqrt{\frac{kT}{m}} \approx 300 \frac{m}{c}$$

($330 \frac{m}{c}$ - скорость звука)



среднее расстояние между молекулами воздуха

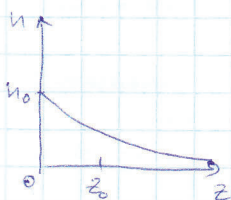
Факт, подтверждающее распределение Гиббса:

1) два газа

$$p = nkT \rightarrow \frac{p}{\rho} = \frac{m}{\mu} kT - \text{закон Менделеева-Клайперона}$$

2) распределение воздуха в атмосфере Земли

$$n(z) = n_0 \cdot e^{-\frac{m_p z}{kT}} = n_0 \cdot e^{-\frac{z}{z_0}}$$



$$z_0 = \frac{kT}{m_p} \approx 8 \text{ km.}$$

§ 31. Распределение энергии по степеням свободы.

Теорема. В состоянии термодинамического равновесия на каждую квадратичную степень свободы приходится в среднем одинаковая энергия $E = \frac{kT}{2}$.

$$k = 1,38 \cdot 10^{-23} \frac{Дж}{град} - \text{постоянная Больцмана}$$

T - абсолютная температура, $T = t + 273$.

теорема о равнораспределении энергии по степеням свободы

Квадратичная степень свободы - переменная, вклад которой в гамильтониан пропорционален квадрату этой переменной

$$H(z) = az_1^2 + h(z')$$

Пример:

Частица в потенциальном силовом поле.



$$\Pi = \Pi(x, y, z)$$

$$H = K + \Pi = H(q, p)$$

обобщенной импульс

$$p_j = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial K}{\partial \dot{q}_j}$$

У частицы 3 степени свободы, $S=3$.

$$q_1 = x, q_2 = y, q_3 = z.$$

$$K = \frac{m}{2} \dot{\sigma}^2 = \frac{m}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)$$

$$p_x = \frac{\partial K}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} \rightarrow \dot{x} = \frac{p_x}{m}$$

$$\Rightarrow \dot{y} = \frac{p_y}{m}, \quad \dot{z} = \frac{p_z}{m}$$

$$\Rightarrow K = \frac{1}{2m} (p_x^2 + p_y^2 + p_z^2)$$

$$H = \frac{1}{2m} (p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) + \Pi(x, y, z)$$

p_x - квадратичная степень свободы
 $-\infty < p_x < \infty$

Зок-во теоремы: $H(z) = az_1^2 + h(z')$
 $z = z_1, z'$

$$E = \langle az_1^2 \rangle = \int az_1^2 w(z) dz; \quad w = ce^{-\frac{H(z)}{kT}} = ce^{-\frac{az_1^2}{kT}} \cdot e^{-\frac{h(z')}{kT}}$$

Ф-я Гиббса,
т.е. состояние
термодинамического
равновесия

$$E = c \int dz' \cdot a \cdot e^{-\frac{h(z')}{kT}} \underbrace{\int dz_1 e^{-\frac{az_1^2}{kT}} z_1^2}_{\oint I}$$

$$\frac{d}{dz_1} e^{-\frac{az_1^2}{kT}} = e^{-\frac{az_1^2}{kT}} \left(-\frac{2az_1}{kT} \right)$$

$$z_1 e^{-\frac{az_1^2}{kT}} = -\frac{kT}{2a} \frac{d}{dz_1} e^{-\frac{az_1^2}{kT}}$$

$$I \oint = -\frac{kT}{2a} \int_{-\infty}^{\infty} z_1 \frac{d}{dz_1} e^{-\frac{az_1^2}{kT}}$$

$$-\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{az_1^2}{kT}} dz_1 \cdot \int = \frac{kT}{2a}$$

$$E = \frac{kT}{2} \cdot c \cdot \int e^{-\frac{az_1^2}{kT}}$$

$$E = \frac{kT}{2} \underbrace{\int w(z) dz}_{1 \text{ по } y \text{ и } z}$$

Пример

Внутренняя энергия

Внутренняя энергия
системы.

Идеальной газ:

$$\Rightarrow U = \langle K + \Pi \rangle = \dots$$

$$\langle K_0 \rangle = \frac{kT}{2} \cdot S$$

число степеней
свободы молекулы

$$\Rightarrow U = N \cdot \frac{kT}{2} \cdot S$$

Δ 1 моль газа

$$\Rightarrow U = N_A \cdot \frac{kT}{2} \cdot S$$

$$N_A \cdot k = R = 8,31 \frac{\text{Дж}}{\text{моль} \cdot \text{К}}$$

$$\Rightarrow U = \frac{1}{2} R T \cdot S$$

$$\frac{d}{dz_1} e^{-\frac{az_1^2}{kT}} = e^{-\frac{az_1^2}{kT}} \left(-\frac{a}{kT}\right) \cdot 2z_1$$

$$z_1 e^{-\frac{az_1^2}{kT}} = -\frac{kT}{2a} \frac{d}{dz_1} e^{-\frac{az_1^2}{kT}}$$

$$I_f = -\frac{kT}{2a} \int_{-\infty}^{\infty} z_1 \frac{d}{dz_1} e^{-\frac{az_1^2}{kT}} dz_1 = -\frac{kT}{2a} \int_{z_1=-\infty}^{z_1=\infty} \left[z_1 e^{-\frac{az_1^2}{kT}} \right]_{z_1=-\infty}^{z_1=\infty} -$$

$$-\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{az_1^2}{kT}} dz_1 = \frac{kT}{2a} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{az_1^2}{kT}} dz_1$$

$$E = \frac{kT}{2} \cdot C \int e^{-\frac{az_1^2 + h(z)}{kT}} dz_1 dz$$

$$E = \frac{kT}{2} \underbrace{\int w(z) dz}_{1'' \text{ по условию нормировки}} \Rightarrow \boxed{E = \frac{kT}{2}} \quad \text{ч.т.д.}$$

Пример

Внутренняя энергия идеального газа.

Внутренняя энергия — среднее значение гамильтониана системы. $U = \langle H \rangle$

Идеальный газ: $\Pi = 0$.

$$\Rightarrow U = \langle K + \Pi \rangle = \langle K \rangle = N \cdot \langle K_0 \rangle$$

кол-во
молекул

средняя кинетическая энергия
одной молекулы

$$\langle K_0 \rangle = \frac{kT}{2} \cdot S$$

↑
число степеней свободы
молекулы

$$\Rightarrow U = N \cdot \frac{kT}{2} \cdot S$$

Δ 1 моль газа ($\nu = 1 \text{ моль}$), тогда $N = N_A$

число Авогадро.

$$\Rightarrow U = N_A \cdot \frac{kT}{2} \cdot S$$

$$N_A \cdot k = R = 8,31 \frac{\text{Дж}}{\text{моль} \cdot \text{град}}$$

— это универсальная газовая постоянная

$$\Rightarrow U = \frac{1}{2} RT \cdot S$$

Нагрев теплоемкость при $V = \text{const}$

отношение тепла
к приращению
температуры

$$dQ = dU + dA, \quad dA = p dV$$

$$V = \text{const} \rightarrow dA = 0$$

$$dQ = dU$$

Теплоемкость: $C_V = \frac{dQ}{dT} = \frac{dU}{dT}$

$$C_V = \frac{1}{2} R \cdot S$$

$$S = \frac{2C_V}{R}$$

- число степеней свободы.

① He: $S=3$ из формулы (как теоретически и для неона, аргона, криптона - инертные газы)

✓ воздух: $S=5$ (кислород, азот, O_2 , N_2)

водород: $S=6$ (аммиак, метан, NH_3 , CH_4)

§32. Диффузия и теплопроводность.

Диффузия - процесс проникновения одного вещества в другое.

Закон диффузии: поток частиц пропорционален градиенту их концентрации.

j_x - поток частиц

$$j_x = -D \frac{\partial n}{\partial x}$$

ось x - ось, вдоль которой меняется концентрация вещества

$$j_x = \frac{\Delta N_x}{S \cdot \Delta t}$$

плотность, через которую

$$[j_x] = \frac{1}{m^2 \cdot c}$$

n - концентрация

x - координата [м]

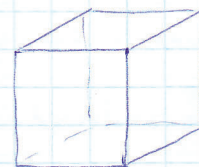
D - коэффициент

Коэффициент диффузии между потоками концентрации.

Частицы всегда диффундируют.

но скорость фуг. диффузионной

Сохранение числа



S - площадь

$$j_x = \frac{\Delta N_x}{S \Delta t} \rightarrow \Delta N_x = j_x S \Delta t$$

$$\Delta N^{(-)} = j_x(x+\Delta x) \cdot S \cdot \Delta t$$

$$\Delta N = \Delta N_x^{(+)} - \Delta N_x^{(-)}$$

$$\Delta x \rightarrow 0 \Rightarrow j_x(x+\Delta x)$$

$$j_x = \frac{\Delta N_x}{S \cdot \Delta t}$$

поверх, через которую прошло ΔN_x частиц за время Δt .

$$[j_x] = \frac{1}{\text{м}^2 \cdot \text{с}}$$

n - концентрация. $n = \frac{N}{V_{\text{объем}}} \quad [\text{м}^{-3}]$

x - координата [м]

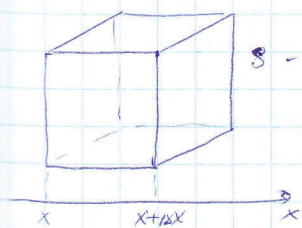
D - коэффициент диффузии $[D] = \frac{\text{м}^2}{\text{с}}$

Коэффициент диффузии $\propto$ коэффициент пропорциональности между потоком частиц и градиентом их концентрации.

Частицы всегда идут в сторону уменьшения их концентрации. $\frac{\partial n}{\partial x}$ - будет отриц. величиной, поэтому берём "-".

по своему физ. св-ву $\rightarrow$ это темп рассеивания диффузионного пучка.

Сохранение числа частиц



S - площадь боковой грани

$$j_x = \frac{\Delta N_x}{S \Delta t} \rightarrow \Delta N_x^{(+)} = j_x(x) \cdot S \cdot \Delta t$$

- число частиц, движущихся через левую грань "куда"

$$\Delta N_x^{(-)} = j_x(x + \Delta x) \cdot S \cdot \Delta t$$

- число частиц, выходящих через правую грань

$$\Delta N = \Delta N_x^{(+)} - \Delta N_x^{(-)} = [j_x(x) - j_x(x + \Delta x)] \cdot S \cdot \Delta t$$

$$\Delta x \rightarrow 0 \Rightarrow j_x(x + \Delta x) = j_x(x) + \frac{\partial j_x}{\partial x} \cdot \Delta x \quad \uparrow \quad \Rightarrow \Delta N = - \frac{\partial j_x}{\partial x} \cdot \Delta x \cdot S \cdot \Delta t$$

↑
ф-ла Тейлора

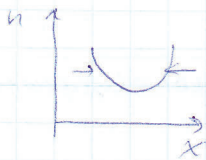
$\frac{\Delta x \cdot S \cdot \Delta t}{\Delta V}$

$$\Rightarrow \frac{\Delta N}{\Delta V} = \Delta n = - \frac{\partial j_x}{\partial x} \cdot \Delta t$$

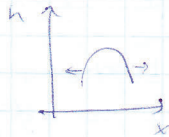
$$\Delta t \rightarrow 0 \Rightarrow \frac{\partial n}{\partial t} = - \frac{\partial j_x}{\partial x}$$

$$j_x = -D \frac{\partial n}{\partial x} \quad (\text{закон диффузии})$$

$$\frac{\partial n}{\partial t} = D \frac{\partial^2 n}{\partial x^2} \quad - \text{уравнение диффузии}$$



$$\frac{\partial^2 n}{\partial x^2} > 0$$



Теплопроводность - процесс переноса тепла в неоднородно нагретом теле.

$$T_1 T_2$$

Закон теплопроводности: поток тепла пропорционален градиенту температуры.

$$j_x = -\chi \frac{\partial T}{\partial x}$$

Поток тепла: $j_x = \frac{\Delta Q_x}{S \Delta t}$ $\left[\frac{\text{Дж}}{\text{м}^2 \cdot \text{с}} \right] = \left[\frac{\text{Вт}}{\text{м}^2} \right]$

x - координата [м]

T - температура [град]

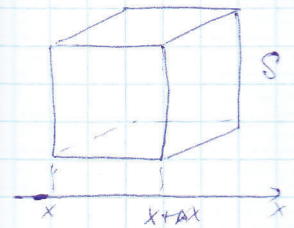
χ - коэффициент теплопроводности

канна

Коэффициент теплопроводности коэффициент пропорциональности между потоком тепла и градиентом температур
"- " - указывает направление потока тепла

$$[\chi] = \frac{\text{Дж}}{\text{м} \cdot \text{с} \cdot \text{град}} = \frac{\text{Вт}}{\text{м} \cdot \text{град}}$$

Уравнение сохранения



$$\Delta x \rightarrow 0 \Rightarrow j_x(x + \Delta x)$$

$$\Rightarrow \Delta Q = - \frac{\partial j_x}{\partial x} \Delta x \cdot S \Delta t$$

$$C = \frac{\Delta Q}{m \Delta T} \quad - \text{удельная теплоемкость}$$

$$\Delta Q = C m \Delta T$$

$$m = \rho \Delta V, \quad \rho - \text{плотность}$$

$$\Delta Q = C \rho \Delta V \Delta T$$

$$C \rho \Delta T = - \frac{\partial j_x}{\partial x} \Delta x \Delta t$$

$$\Delta t \rightarrow 0 \Rightarrow C \rho \frac{\partial T}{\partial t} = - \frac{\partial j_x}{\partial x}$$

$$j_x = -\chi \frac{\partial T}{\partial x}$$

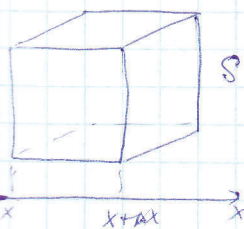
$$C \rho \frac{\partial T}{\partial t} = \chi \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \chi \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

$$\chi = \frac{\chi}{C \rho} \quad \left[\frac{\text{м}^2}{\text{с}} \right] \quad - \text{теплопроводность}$$

$$[\alpha] = \frac{\partial \pi}{\partial \text{м.с. град}} = \frac{\text{Вт}}{\text{м. град}} \quad \Delta T = \frac{\partial \pi}{\partial \dots}$$

Уравнение сохранения тепловой энергии.



$$j_x = \frac{\Delta Q_x}{S \Delta t} \Rightarrow j_x(x) = \frac{\Delta Q_x^{(-)}}{S \Delta t} \quad \Delta Q_x^{(+)} = j_x(x) \cdot S \cdot \Delta t$$

$$\Delta Q_x^{(+)} = j_x(x + \Delta x) S \Delta t$$

$$\Delta Q = \Delta Q_x^{(+)} - \Delta Q_x^{(-)} = [j_x(x) - j_x(x + \Delta x)] S \Delta t.$$

$$\Delta x \rightarrow 0 \Rightarrow j_x(x + \Delta x) = j_x(x) + \frac{\partial j_x}{\partial x} \cdot \Delta x$$

↑
ф-ла Тейлора

$$\Rightarrow \Delta Q = - \frac{\partial j_x}{\partial x} \underbrace{\Delta x \cdot S}_{\Delta V} \Delta t$$

$$C = \frac{\Delta Q}{m \Delta T} \quad \text{— удельная теплоемкость} \quad \left[\frac{\text{Дж}}{\text{кг. град}} \right]$$

$$\Delta Q = C \cdot m \cdot \Delta T$$

$$m = \rho \cdot \Delta V \quad \rho \text{ — плотность } \left[\frac{\text{кг}}{\text{м}^3} \right]$$

$$\Delta Q = C \rho \cdot \Delta V \cdot \Delta T$$

$$C \rho \Delta T = - \frac{\partial j_x}{\partial x} \cdot \Delta t$$

$$\Delta t \rightarrow 0 \Rightarrow \boxed{C \rho \frac{\partial T}{\partial t} = - \frac{\partial j_x}{\partial x}} \quad \text{— уравнение сохранения энергии}$$

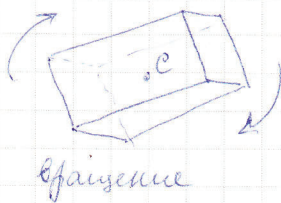
$$j_x = - \chi \frac{\partial T}{\partial x}$$

$$C \rho \frac{\partial T}{\partial t} = \chi \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

$$\boxed{\frac{\partial T}{\partial t} = \chi \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}} \quad \text{— уравнение теплопроводности}$$

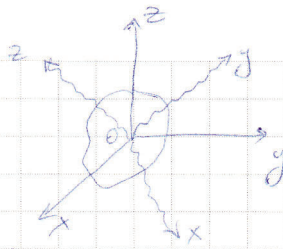
$$\chi = \frac{\lambda}{C \rho} \quad \left[\frac{\text{м}^2}{\text{с}} \right] \quad \text{— коэффициент температурной проводимости.}$$

§ 33. Понятие инерции твёрдого тела.
Главные оси инерции.



вращение

$$m\vec{a}_c = \vec{F}_{внешн.}$$



$$\vec{N} = \vec{M}$$

$$\vec{N} = \sum_i \vec{N}_i$$

$$\vec{N}_i = [\vec{r}_i, m_i \vec{v}_i]$$

$$\S 3. \quad \vec{v}_i = [\vec{\omega}, \vec{r}_i]$$

$$\vec{N}_i = m_i [\vec{r}_i, [\vec{\omega}, \vec{r}_i]] = m_i \{ \vec{\omega} r_i^2 - \vec{r}_i (\vec{r}_i, \vec{\omega}) \}$$

Структурируем это векторное равенство на оси координат, связанное с телом

$$\begin{cases} r_i^2 = x_i^2 + y_i^2 + z_i^2 \\ (\vec{r}_i, \vec{\omega}) = x_i \omega_x + y_i \omega_y + z_i \omega_z \end{cases}$$

$$N_{ix} = m_i \{ \omega_x (x_i^2 + y_i^2 + z_i^2) - x_i (x_i \omega_x + y_i \omega_y + z_i \omega_z) \}$$

$$\Rightarrow N_{ix} = m_i \{ \omega_x (y_i^2 + z_i^2) - x_i y_i \omega_y - x_i z_i \omega_z \}$$

Аналогично получим:

$$N_{iy} = m_i \{ -y_i x_i \omega_x + \omega_y (x_i^2 + z_i^2) - y_i z_i \omega_z \}$$

$$N_{iz} = m_i \{ -z_i x_i \omega_x - z_i y_i \omega_y + (x_i^2 + y_i^2) \omega_z \}$$

$$\sum_i$$

$$N_x = J_{xx} \omega_x + J_{xy} \omega_y + J_{xz} \omega_z$$

$$N_y = J_{yx} \omega_x + J_{yy} \omega_y + J_{yz} \omega_z$$

$$N_z = J_{zx} \omega_x + J_{zy} \omega_y + J_{zz} \omega_z$$

$$\begin{cases} J_{xx} = \sum_i m_i (y_i^2 + z_i^2) & \text{— момент инерции тела} \\ J_{yy} = \sum_i m_i (x_i^2 + z_i^2) \\ J_{zz} = \sum_i m_i (x_i^2 + y_i^2) \end{cases}$$

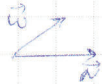
$$\begin{cases} J_{xy} = - \sum_i m_i x_i y_i = J_{yx} \\ J_{xz} = - \sum_i m_i x_i z_i = J_{zx} \\ J_{yz} = - \sum_i m_i y_i z_i = J_{zy} \end{cases}$$

Тензор инерции тела — матрица $\hat{J}$:

$$\hat{J} = \begin{pmatrix} J_{xx} & J_{xy} & J_{xz} \\ J_{yx} & J_{yy} & J_{yz} \\ J_{zx} & J_{zy} & J_{zz} \end{pmatrix}$$

$$\vec{N} = \hat{J} \vec{\omega}$$

Момент вращения сводит 2-х векторов, когда эти вектора не параллельны друг другу.



Главные оси инерции — оси $\overset{x,y,z}{\curvearrowright}$, в которых тензор инерции диагонален.

$$\hat{J} = \begin{pmatrix} J_x & 0 & 0 \\ 0 & J_y & 0 \\ 0 & 0 & J_z \end{pmatrix}$$

J_x, J_y, J_z — главные моменты инерции тела.

$$\begin{cases} N_x = J_x \omega_x \\ N_y = J_y \omega_y \\ N_z = J_z \omega_z \end{cases}$$

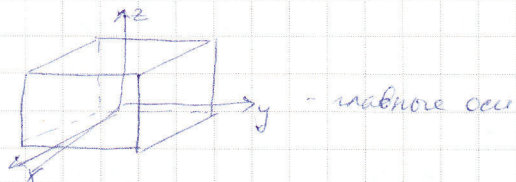
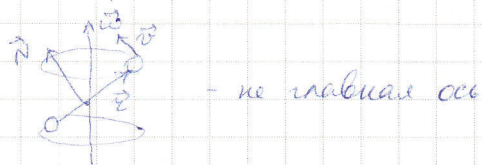
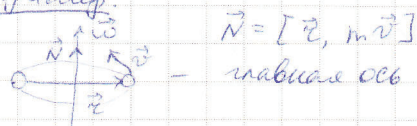
Допустим, что тело вращается вокруг одной из главных осей, например, оси x .

Пример: $\omega_x \neq 0$, $\omega_y = \omega_z = 0$.

$$\rightarrow N_x \neq 0, N_y = N_z = 0.$$

Физически главные оси инерции характеризуются тем, что при вращении вокруг этих осей вектор $\vec{N}$ становится $\parallel$ вектору $\vec{\omega}$.

Пример:



§34. Динамика твёрдого тела. Уравнения Эйлера.

$$\dot{\vec{N}} = \vec{M} = \frac{d\vec{N}}{dt}$$

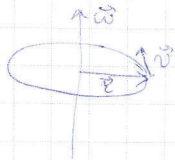
x, y, z - главные оси инерции.
 $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ - орты

$$\vec{N} = \vec{i} N_x + \vec{j} N_y + \vec{k} N_z$$

$$\begin{cases} N_x = J_x \omega_x, & N_y = J_y \omega_y, \\ N_z = J_z \omega_z. \end{cases}$$

$$d\vec{N} = \vec{i} dN_x + \vec{j} dN_y + \vec{k} dN_z + N_x d\vec{i} + N_y d\vec{j} + N_z d\vec{k}$$

$$d\vec{i} = [\vec{\omega}, \vec{i}] dt \quad (84)$$



$$\vec{v} = [\vec{\omega}, \vec{r}]$$

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

$$d\vec{r} = [\vec{\omega}, \vec{r}] dt$$

$$\begin{cases} d\vec{i} = [\vec{\omega}, \vec{i}] dt \\ d\vec{j} = [\vec{\omega}, \vec{j}] dt \\ d\vec{k} = [\vec{\omega}, \vec{k}] dt \end{cases}$$

$$d\vec{N} = d'\vec{N} + [\vec{\omega}, \vec{N}] dt$$

↑
вращающаяся в
любом направлении с угловой скоростью

$$\dot{\vec{N}} = \frac{d\vec{N}}{dt} = \frac{d'\vec{N}}{dt} + [\vec{\omega}, \vec{N}] = \vec{N}$$

Описывая это векторное равенство на малые деу углы и т.д.

$$N_x = J_x \omega_x \quad [\vec{\omega}, \vec{N}] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ N_x & N_y & N_z \end{vmatrix} \cdot N_z = J_z \omega_z$$

$$J_x \frac{d'\omega_x}{dt}$$

$$[\vec{\omega}, \vec{N}] = \vec{i} (J_z - J_y) \omega_y \omega_z + \vec{j} (J_x - J_z) \omega_x \omega_z + \vec{k} (J_y - J_x) \omega_x \omega_y$$

$$\begin{cases} J_x \frac{d'\omega_x}{dt} + (J_z - J_y) \omega_y \omega_z = M_x \\ J_y \frac{d'\omega_y}{dt} + (J_x - J_z) \omega_x \omega_z = M_y \\ J_z \frac{d'\omega_z}{dt} + (J_y - J_x) \omega_x \omega_y = M_z \end{cases}$$

— уравнения Эйлера

$$\omega_x(t), \omega_y(t), \omega_z(t)$$

Пример: свободное вращение симметричного
бруска — тело, у к-ого главные 2 из 3
равных момента инерции.

$$J_x = J_y \equiv J_A \neq J_z \equiv J_B$$

Свободное вращение $\Rightarrow \vec{M} = 0$.

$$J_A \dot{\omega}_x + (J_B - J_A) \omega_y \omega_{z0} = 0$$

$$J_A \dot{\omega}_y + (J_A - J_B) \omega_x \omega_{z0} = 0$$

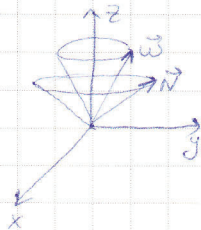
$$J_B \dot{\omega}_z = 0 \rightarrow \omega_z(t) = \omega_{z0} = \text{const}$$

$$\begin{cases} \dot{\omega}_x + \Omega \omega_y = 0 \\ \dot{\omega}_y - \Omega \omega_x = 0 \end{cases}$$

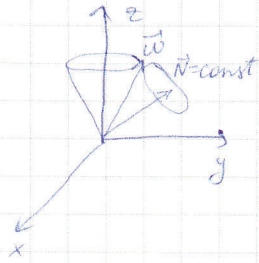
$$\Omega = \frac{J_B - J_A}{J_A} \omega_{z0}$$

$$\begin{cases} \omega_x(t) = \omega_0 \cos(\Omega t + \varphi) \\ \omega_y(t) = \omega_0 \sin(\Omega t + \varphi) \\ \omega_z(t) = \omega_{z0} \end{cases}$$

$$\begin{cases} N_x = N_0 \cdot \cos(\Omega t + \varphi) \\ N_y = N_0 \cdot \sin(\Omega t + \varphi) \\ N_z = N_{z0} = \text{const} \end{cases}$$



Т.к. $\vec{M} = 0$, то $\dot{\vec{N}} = \text{const}$



Свободный симметричный
всплеск движется так, как
если бы он был встроены
в конус, касаясь его
поверхности по поверхности
близко конуса

Всплеск 2 типа.

по §

— контрольные вопросы
(ответы без переноски)
по билету, и можно отвечать $\Rightarrow 2$.